Technique calculatoire
Savoir encadrer

Exercice Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x \in [1, 4]$; $2 \leqslant y \leqslant 5$ et $|z| < 3$.

Pour les expressions suivantes, déterminer l'encadrement le plus fin possible :

1) $2x - 3y + 1$

2) $x(y - 3)$

3) $\dfrac{4x}{y+1}$

4) $x^2 + 4 - 4x$

5) $\dfrac{z}{5}$

6) $\dfrac{1}{z-2}$

7) $\dfrac{x(z-4)}{y-1}$

8) $\sqrt{xy} - 3e^{2-z}$ ■

Rappel de cours 1.

Il est utile de rappeler que l'**on a le droit** :
- d'additionner membre à membre des inégalités ;
- de multiplier membre à membre une inégalité par un réel : si celui-ci est positif, on conserve le sens des inégalités ; s'il est négatif, on change le sens des inégalités ; - de multiplier membre à membre les inégalités entre elles, si toutes les quantités en présence sont positives.

En revanche, **on n'a pas le droit** :
- de soustraire des inégalités ;
- de diviser membre à membre des inégalités.

Par ailleurs, on évitera de multiplier les inégalités lorsque les membres en présence ne sont pas de même signe. Dans ce cas, on manipulera les expressions pour avoir à multiplier des inégalités dont les termes sont tous positifs.

Ce petit exercice va permettre d'illustrer cela.

1. On a :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2 \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$$

Donc en multipliant la première inégalité par $2 \geqslant 0$ et la seconde par $-3 \leqslant 0$ - (la seconde inégalité change donc de sens) - il vient :

$$\begin{cases} 2 \leqslant 2x \leqslant 8 \\ -15 \leqslant -3y \leqslant -6 \end{cases}$$

En additionnant ces deux inégalités et en rajoutant 1 de part et d'autre, on conclut :

$$\boxed{-12 \leqslant 2x - 3y + 1 \leqslant 3}$$

2. Nous allons tenter ici deux méthodes différentes :

Premier encadrement possible
On remarque que $x(y-3) = xy - 3x$ et on a :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2 \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$$

Les termes en présence sont tous positifs donc on peut multiplier membre à membre les deux inégalités, tout en encadrant par ailleurs $-3x$ (l'inégalité change de sens dans ce cas car $-3 \leqslant 0$) :

$$\begin{cases} 2 \leqslant xy \leqslant 20 \\ -12 \leqslant -3x \leqslant -3 \end{cases}$$

Ce qui donne, par addition membre à membre : $\boxed{-10 \leqslant x(y-3) \leqslant 17}$

Second encadrement possible
On a :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ -1 \leqslant y - 3 \leqslant 2 \end{cases}$$

Point méthodologique 1.

On est quelque peu embêtés car la seconde inégalité présente une quantité négative. Pour déjouer ce problème, nous allons distinguer les cas et rejoindre des inégalités à quantités positives. Voyons comment.

Distinguons alors deux cas.
Premier cas : si $y - 3 \geqslant 0$
On a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y - 3 \leqslant 2 \end{cases}$$

On peut alors multiplier membre à membre puisque les membres sont tous positifs. On obtient un premier encadrement :

$$\boxed{0 \leqslant x(y-3) \leqslant 8}$$

Second cas : si $y - 3 \leqslant 0$
On a alors les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ -1 \leqslant y - 3 \leqslant 0 \end{cases}$$

Astuce La seconde inégalité est constituée de membres négatifs. Pour les rendre positifs, il suffit de multiplier l'inégalité par -1, sans oublier de changer le sens de l'inégalité... ■

On multiplie la seconde inégalité par $-1 \leqslant 0$:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant 3-y \leqslant 1 \end{cases}$$

On peut alors multiplier membre à membre puisque les membres sont tous positifs. On obtient l'encadrement :

$$0 \leqslant x(3-y) \leqslant 4$$

Et pour retomber sur $x(y-3)$, il suffit de multiplier cette dernière inégalité par -1. On peut conclure :

$$\boxed{-4 \leqslant x(y-3) \leqslant 0}$$

En mettant bout à bout les deux cas analysés, on peut à présent conclure :

$$\boxed{-4 \leqslant x(y-3) \leqslant 8}$$

■ **Remarque** Le second encadrement est bien plus fin que le premier encadrement obtenu. Très souvent, le but des exercices d'analyse consistera à trouver des encadrements aussi fins que possible. Ici, les quantités sont simples. A l'avenir, cela va se compliquer avec, notamment, des encadrement d'intégrales... ■

3. On peut aller plus vite à présent :

$$\begin{cases} 4 \leqslant 4x \leqslant 16 \\ 3 \leqslant y+1 \leqslant 6 \end{cases}$$

Point méthodologique 2.

On peut "passer à l'inverse" dans une inégalité lorsque les membres sont de mêmes signes et tous non nuls. En terme de rédaction, il est plus élégant de dire que l'on applique la fonction inverse, strictement décroissante sur l'intervalle considéré.

Dans la seconde inégalité, on applique la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\begin{cases} 4 \leqslant 4x \leqslant 16 \\ \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{y+1} \leqslant \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

On peut à présent multiplier membre à membre, les quantités étant toutes positives, et on conclut, après simplification du membre de gauche :

$$\boxed{\frac{2}{3} \leqslant \frac{4x}{y+1} \leqslant \frac{16}{3}}$$

4. On a plusieurs méthodes possibles, ici, mais toutes ne donnent pas la même finesse d'encadrement.
Première méthode On encadre x^2 puis $-4x$, on additionne les inégalités obtenues et on rajoute 4 de chaque côté de l'inégalité. On obtient :

$$\boxed{-11 \leqslant x^2-4x+4 \leqslant 16}$$

Vous l'aurez sans doute devinez, ce n'est pas la méthode qui donne l'encadrement le plus fin...
Seconde méthode

Point méthodologique 3.

Lorsqu'on veut encadrer une fonction qui ne dépend que d'une variable (x dans notre cas), on peut toujours faire une étude de fonction sur l'intervalle considéré dans l'énoncé, dresser le tableau de variations et observer le minimum et le maximum. C'est souvent la méthode qui permet de trouver l'encadrement le plus fin.

On fait une rapide étude de fonction en posant $f : x \mapsto x^2 + 4 - 4x$ sur l'intervalle $[1, 4]$ et on observe que f décroît sur l'intervalle $[1, 2]$ puis croît sur $[2, 4]$. Comme, après calculs, $f(1) = 1$; $f(2) = 0$ et $f(4) = 4$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	1		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

On peut dès lors conclure :

$$\boxed{0 \leqslant x^2 + 4 - 4x \leqslant 4}$$

Troisième méthode On pouvait également reconnaître une identité remarquable puisque :

$$x^2 + 4 - 4x = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Or, on a $-1 \leqslant x - 2 \leqslant 2$.

Point méthodologique 4.

Attention, lorsqu'une quantité est comprise entre un nombre négatif et un nombre positif, on ne peut pas élever au carré car la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur les négatifs et croissante sur les positifs. Une fois de plus, on est obligé de distinguer deux cas.

Premier cas : si $x - 2 \leqslant 0$:
On a alors $-1 \leqslant x - 2 \leqslant 0$, on applique la fonction carré, décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et on a : $0 \leqslant (x - 2)^2 \leqslant 1$.

Second cas : si $x - 2 \geqslant 0$:
On a alors $0 \leqslant x - 2 \leqslant 2$, on applique la fonction carré, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $0 \leqslant (x - 2)^2 \leqslant 4$. En mettant en relation ces deux informations, on peut conclure :

$$\boxed{0 \leqslant x^2 + 4 - 4x \leqslant 4}$$

Les deux dernières méthodes proposent donc la même finesse d'encadrement.

5. Pour faire cette question, il faut connaître le point de cours suivant :

Rappel de cours 2.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$$

Il vient alors directement : $-3 < z < 3$ i.e. en divisant par $5 > 0$, on conclut directement :

$$\boxed{-\frac{3}{5} < \frac{z}{5} < \frac{3}{5}}$$

6. Notons tout d'abord que l'inégalité n'a de sens que pour $z - 2 \neq 0$. Et on a, d'après le rappel de cours vu précédemment : $-5 < z - 2 < 1$.

Point méthodologique 5.

Attention, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ (car non définie en 0...) donc, lorsqu'on a une inégalité avec une quantité négative à gauche, et positive à droite, on ne peut pas passer à l'inverse directement. On est, une fois de plus, obligés de distinguer deux cas.

Premier cas : si $z - 2 < 0$ Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{z-2} < -\frac{1}{5}}$$

Second cas : si $z - 2 > 0$ Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\boxed{\frac{1}{z-2} > 1}$$

7. On peut aller plus vite à présent ! On observe que tout d'abord que :

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{y-1} \leqslant 1$$

Par ailleurs $-7 < z - 4 < -1$ que l'on multiplie par -1 (voir le 2. pour s'en convaincre) pour revenir à des membres positifs et ainsi pouvoir multiplier l'inégalité membre à membre avec l'inégalité $1 \leqslant x \leqslant 4$. Cela donne :

$$\begin{cases} 1 < 4 - z < 7 \\ 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} 1 < x(4 - z) < 28 \\ \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{y-1} \leqslant 1 \end{cases}$$

Soit en multipliant membre à membre ces deux inégalités composées de termes positifs :

$$\frac{1}{4} < \frac{x(4-z)}{y-1} < 28$$

Il nous reste à multiplier par -1 pour rejoindre la forme recherchée et l'on peut conclure :

$$\boxed{-28 < \frac{x(z-4)}{y-1} < -\frac{1}{4}}$$

8. Ici, on va simplement utiliser la croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$ et celle de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. On obtient pour commencer :

$$\begin{cases} 2 \leqslant xy \leqslant 20 \\ -1 < 2 - z < 5 \end{cases}$$

Puis, en appliquant la fonction racine, croissante sur $\mathbb{R}_+$, à la première inégalité, puis la fonction exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$, à la seconde inégalité, il vient, après simplification :

$$\begin{cases} \sqrt{2} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant 2\sqrt{5} \\ \\ e^{-1} < e^{2-z} < e^{5} \end{cases}$$

On multiplie la seconde inégalité par $-3 < 0$ et il vient :

$$\begin{cases} \sqrt{2} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant 2\sqrt{5} \\ \\ -3e^5 < -3e^{2-z} < -3e^{-1} \end{cases}$$

On additionne ces deux inégalités, et en remarquant que $e^{-1} = \frac{1}{e}$, on peut enfin conclure :

$$\boxed{\sqrt{2} - 3e^5 < \sqrt{xy} - 3e^{2-z} < 2\sqrt{5} - \frac{3}{e}}$$