Algèbre linéaire - Problème de synthèse
Correction

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels (respectivement à coefficients complexes).

Pour tout couple d'entiers (i, j) de $[\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à la $i^{ième}$ ligne et à la $j^{ième}$ colonne qui est égal à 1.

On rappelle que la famille $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne par I_n la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, et par 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A, et on note $Tr(A)$, la somme des coefficients diagonaux de A.

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est appelé une homothétie lorsqu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda id$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

On considère l'application φ_A définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi_A(M) = AM - MA.$$

On rappelle que si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $P(A)$ désigne la matrice

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \quad \text{de} \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Enfin , on note $\mathbb{R}[A]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathbb{R}[A] = \{P(A) \backslash P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de φ_A.

La partie I étudie la diagonalisabilité de l'endomorphisme φ_A dans un cas particulier.

Les parties II et III étudient les sous-espaces propres de φ_A.

La partie IV étudie la diagonalisabilité de φ_A dans le cas général.

Enfin, la partie V compare les valeurs propres de A et celles de φ_A dans le cas $n = 2$.

Les quatre premières parties de ce problème sont dans une large mesure indépendantes.

Préliminaire

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que l'application Tr est une forme linéaire surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   En déduire que son noyau, noté $\mathcal{T}$, est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $Tr(MN) = Tr(NM)$.
   En déduire que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont la même trace.

4. Montrer que : $Im(\varphi_A) \subset \mathcal{T}$, où $Im(\varphi_A)$ désigne l'image de l'endomorphisme φ_A.
   Existe-t-il une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_A(B) = I_n$?

Partie I : Etude d'un cas particulier

Dans cette partie seulement, on suppose que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Expliciter la matrice C associée à l'endomorphisme φ_A relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Déterminer le rang de C, puis expliciter une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_A.
   L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ?

Partie II : Etude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, on suppose que λ est une valeur propre non nulle de φ_A.
On note alors B un vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre λ.

1. Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a :
$$\varphi_A(B^k) = \lambda k B^k.$$
On pourra procéder par récurrence.

3. En déduire qu'il existe un entier naturel d tel que $B^d = 0_n$.

Partie III : Etude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Dans cette partie, on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. On note $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ le noyau de l'application φ_A.

1. Montrer que 0 est valeur propre de φ_A.

2. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Montrer l'équivalence :
$$B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A) \iff u \circ v = v \circ u.$$

3. a) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur non nul.

   Dans la suite de cette question, II désigne un polynôme annulateur non nul de A et degré minimal, on note d le degré de II.

   b) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tel que
$$P = \mathrm{II}.Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < d.$$

   c) En déduire que $(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$, puis montrer que $\mathbb{R}[A] \subset \mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

   d) Montrer que si u n'est pas une homothétie, alors $Im(\varphi_A) \neq \mathcal{T}$, le sous-espace $\mathcal{T}$ ayant été défini dans le préliminaire.

4. Un cas d'égalité

On suppose dans cette question que la matrice A est nilpotente d'ordre n :
$$A^n = 0_n \quad \text{et} \quad A^{n-1} \neq 0_n.$$

On considère un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, où $0_{\mathbb{R}^n}$ désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.

Et on pose, pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$:

$$e_i = u^{n-i}(x).$$

a) Montrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Soit $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$. On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Montrer qu'il existe n réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,$$

puis montrer que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$$

c) En déduire $\text{Ker}(\varphi_A)$, puis la dimension de $\text{Ker}(\varphi_A)$ dans ce cas.

5. Cas particulier où $\text{Ker}(\varphi_A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Montrer que si u est une homothétie, alors $\text{Ker}(\varphi_A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) i. Montrer que u est une homothétie si, et seulement si, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
On pourra considérer la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

ii. Montrer que si $\text{Ker}(\varphi_A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors u est une homothétie.

Pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^n$, en notant H_x un supplémentaire de $\text{Vect}(x)$ *dans* $\mathbb{R}^n$*, on pourra considérer la projection sur* $\text{Vect}(x)$ *parallèlement à* H_x.

6. Cas où u est diagonalisable

On suppose dans cette question que l'endomorphisme u est diagonalisable.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de u (avec $1 \leq p \leq n$), et pour tout entier k de $[\![1, p]\!]$, on note $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_k, et m_k la dimension de cet espace propre.

Pour tout entier k de $[\![1, p]\!]$, on note $\mathcal{B}_k$ une base du sous-espace propre $E_u(\lambda_k)$.

Et on désigne par $\mathcal{B}$ la famille obtenue en réunissant successivement les vecteurs des familles $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p$.

a) Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b) Soient B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Montrer que $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$ si, et seulement si, pour tout entier k de $[\![1, p]\!]$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v.

c) Soient B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Montrer que B est un vecteur de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ si, et seulement si, la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ a une forme que l'on précisera.

d) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ en fonction de $m_1, m_2, \ldots, m_p$.

Partie IV : Etude de la diagonalisabilité de φ_A

Nous allons montrer dans cette partie l'équivalence : A est diagonalisable si, et seulement si, φ_A est diagonalisable.

1. On suppose dans cette question que la matrice A est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

a) Exprimer, pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la matrice $AE_{i,j} - E_{i,j}A$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

b) En déduire que φ_A est diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que la matrice A est diagonalisable.

Il existe ainsi une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{de} \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

telles que

$$P^{-1}AP = D.$$

En considérant les matrices $B_{i,j}$ définies pour tout couple d'entiers (i, j) de $[\![1, n]\!]$ par

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1},$$

démontrer alors que φ_A est diagonalisable.

3. On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On note $(P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de φ_A, et on note $\lambda_{i,j}$ la valeur propre de φ_A associé au vecteur propre $P_{i,j}$.

   a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM - MA$).

      i. Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.

      ii. Soit $z \in \mathbb{C}$.
      Montrer que si z est valeur propre de A, alors z est également valeur propre de ${}^tA$, où ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

      iii. Soit $z \in \mathbb{C}$.
      Montrer que si z est valeur propre de A, alors $\overline{z}$ est également valeur propre de A.

      iv. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z est valeur propre de A.
      Justifier l'existence de deux matrices-colonnes non nulles X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que

      $$AX = zX \quad \text{et} \quad {}^tAY = \overline{z}Y.$$

      En calculant $\varphi_A(X\ {}^tY)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A.

      v. En déduire que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

   On admet que A admet au moins une valeur propre complexe. On considère alors λ une valeur propre réelle de A, et on note X un vecteur propre de A associé à λ.

   b) Démontrer que, pour tout couple d'entiers (i,j) de $[\![1,n]\!]$, il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et de $\lambda_{i,j}$ tel que

   $$AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X.$$

   c) On note Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

   $$\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = MX.$$

   Démontrer que l'application Φ est surjective.

   d) Déduire des questions précédentes que la matrice A est diagonalisable.

Partie V : Comparaison des valeurs propres de A et de φ_A lorsque $n = 2$

On pourra ici utiliser les résultats montrés dans les parties précédentes en les référençant clairement.

On suppose désormais que $n = 2$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A.

On suppose que u n'est pas une homothétie et que u est diagonalisable.

1. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$, puis montrer que $(I_2/, A)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

2. Montrer que φ_A est diagonalisable et que φ_A admet trois valeurs propres distinctes : $0; \lambda$ et $-\lambda$, où λ désigne un réel non nul.

   Dans la suite, on note B un vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre λ, et on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice B.

3. La matrice B est-elle inversible ? Quelle est la trace de B ?

   En explicitant la matrice B, vérifier que $B^2 = 0_2$.

4. Montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^2$ tel que $(x, v(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   Vérifier que la matrice de l'endomorphisme u dans la base $(x, v(x))$ est triangulaire inférieure.

   En déduire que les valeurs propres de u sont :

$$\frac{Tr(A) - \lambda}{2} \quad \text{et} \quad \frac{Tr(A) + \lambda}{2}.$$

Correction

■ **Corrigé :**

Préliminaire

1. On remarque que φ_A va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.

   On a :

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda M+N) &= A(\lambda M+N)-(\lambda M+N)A = \lambda AM+AN-(\lambda MA+NA)\\ &= \lambda(AM-MA)+(AN-NA)\\ &= \lambda\varphi_A(M)+\varphi_A(N)\end{aligned}$$

   L'application φ_A est donc linéaire.

   On en conclut que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. • Soient $M=(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $N=(n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.

   On a :

$$Tr(\lambda M+N)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda M+N)_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}(\lambda m_{i,i}+n_{i,i})$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{n}m_{i,i}+\sum_{i=1}^{n}n_{i,i}$$

$$=\lambda Tr(M)+Tr(N).$$

   L'application Tr est donc linéaire et comme elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, Tr est bien une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   • On sait que $Im(Tr)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

   D'où $\dim(Im(Tr))\leq 1$.

   On remarque que $Tr(I_n)=n\neq 0$.

D'où

$$Im(Tr) \neq \{0\} \quad \text{et donc} \quad \dim(Im(Tr)) \geq 1.$$

On en déduit que $Im(Tr)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ de même dimension 1.

D'où $Im(Tr) = \mathbb{R}$ et Tr est surjective.

■ **Remarque** Ceux qui ont fait le sujet de l'EDHEC 2005 sur la trace se souviennent que l'on pouvait traiter cette question par d'autres méthodes : en procédant par double inclusion ou en revenant à l'expression de l'image à l'aide de la base de $\mathcal{M}_n\mathbb{R}$. ■

- D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \text{Ker}(Tr) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim Im(Tr) = n^2 - 1.$$

Par conséquent, $\mathcal{T} = \text{Ker}(Tr)$ est bien un hyperplan de Tr.

3. Soient $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose

$$MN = C = (c_{i,j}) \quad \text{et} \quad NM = D = (d_{i,j}).$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} n_{i,k}m_{k,j}.$$

Alors :

$$Tr(MN) = Tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,i}$$

et :

$$Tr(NM) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} n_{i,k}m_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{k,i}n_{i,k}$$

$$= \sum_{k'=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} m_{k',i'}n_{i',k'}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,i} \quad \text{en posant} \quad i' = k \quad \text{et} \quad k' = i$$

$$= Tr(MN)$$

Supposons que M et N sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}MP = N.$$

Alors :

$$Tr(N) = Tr(P^{-1}(MP)) = Tr((MP).P^{-1}) = Tr(M).$$

Deux matrices semblables ont donc la même trace.

4. Soit $M \in Im(\varphi_A)$. Il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \varphi_A(N)$.

   Par linéarité de la trace, et d'après la question précédente, on obtient :

   $$Tr(M) = Tr(\varphi_A(N)) = Tr(AN - NA) = Tr(AN) - Tr(NA) = 0.$$

   On en déduit que $M \in \text{Ker}(Tr) = \mathcal{T}$.

   On a bien montré l'inclusion : $Im(\varphi_A) \subset \mathcal{T}$.

   Supposons qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_A(B) = I_n$.

   On en déduit que $I_n \in Im(\varphi_A)$, et donc $I_n \in \mathcal{T}$.

   Or $Tr(I_n) = n \neq 0$. Il y a donc contradiction.

   Par conséquent, $I_n \notin Im(\varphi_A)$: il n'existe pas de matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_A(B) = I_n$.

Partie I

1. Un petit point méthodologique s'impose !

   Point méthodologique 1.

   On a ici plusieurs méthodes possibles.

   La méthode la plus conforme à l'exercice consiste à chercher par le calcul les valeurs de λ telles que $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.

   Plus rapide, une méthode à la limite du programme consiste à utiliser le cours sur le déterminant d'une matrice carré d'ordre 2.

   Enfin, une dernière méthode n'est pas adaptée à l'énoncé mais est très intéressante : elle consiste à utiliser le fait que la matrice est symétrique puis à utiliser les propriétés de la trace... Voyons voir !

Première méthode : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{lll} \lambda \text{ est valeur propre de } A & \text{si, et seulement si,} & A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \text{si, et seulement si,} & \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ & \text{si, et seulement si,} & (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ & \text{si, et seulement si,} & 1 - \lambda = 2 \text{ ou } 1 - \lambda = -2 \\ & \text{si, et seulement si,} & \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3 \end{array}$$

La matrice A admet deux valeurs propres distinctes : -1 et 3.

Comme A est une matrice carrée d'ordre 2, A est diagonalisable.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a :

$$AX = -X \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & -x \\ 2x & + & y & = & -y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array} \right. \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base du sous-espace propre E_{-1} de A associé à la valeur propre -1.

Et :

$$AX = 3X \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 3x \\ 2x & + & y & = & 3y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base du sous-espace propre E_3 de A associé à la valeur propre 3.

Deuxième méthode : A est symétrique réelle donc diagonalisable et donc semblable à une matrice diagonale D. Or A n'est pas une matrice scalaire donc nécessairement A admet 2 valeurs propres distinctes.

De plus, on remarque classiquement que :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 est donc valeur propre de A et comme son sous-espace propre associé E_3 est nécessairement de dimension 1, on a comme précédemment $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base du sous-espace propre E_3 de A associé à la valeur propre 3. En notant λ la valeur propre restante, on utilise astucieusement une propriété de la trace qui nous dit que :

$$Tr(A) = Tr(D) = 2 = 3 + \lambda$$

Ce qui donne directement :

$$\lambda = -1$$

On trouve alors par le calcul le sous-espace propre restant...

2. On a :

$$\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2E_{1,2} + 2E_{2,1}.$$

$$\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2E_{1,1} + 2E_{2,2}.$$

$$\varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} - 2E_{2,2}.$$

$$\varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,2} - 2E_{2,1}.$$

On en déduit la matrice C canoniquement associée à l'endomorphisme φ_A :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Les deux premières colonnes de C forment une famille libre (elles sont non colinéaires), et on remarque que $C_3 = -C_2$ et $C_4 = -C_1$, en notant C_i la $i^{ième}$ colonne de C. On en déduit que C est de rang 2.

   Comme $\text{rg}(\varphi_A) = \text{rg}(C) = 2$, on déduit du théorème du rang que :

   $$\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim Im(\varphi_A) = 2^2 - 2 = 2.$$

   De plus, on remarque que :

   $$C\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

   On en déduit que les matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2$ et $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = B$ sont deux matrices de $\text{Ker}(\varphi_A)$.

   Comme les matrices I_2 et B sont non colinéaires, (I_2, B) forme une famille libre de $\text{Ker}(\varphi_A)$, et donc une base de $\text{Ker}(\varphi_A)$ puisque $\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = 2$.

4. On a montré à la question précédente que 0 est valeur propre de φ_A et que (I_2, B) forme une base du sous-espace propre $\text{Ker}(\varphi_A)$.

   Déterminons alors les valeurs propres non nulles de φ_A.

   Point méthodologique 2.

   On a deux méthodes possibles ici.

   Soit on fait le calcul très lourd consistant à résoudre un système à l'aide de la matrice C : nous vous laissons le faire et vérifier que l'on obtient le même résultat qu'avec la seconde méthode !

   Soit on repart de la définition d'une valeur propre et l'on se sert de $Im(\varphi_A)$. Nous allons plutôt donner une chance à cette méthode.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. λ est valeur propre de φ_A ssi il existe $M \neq 0$ tel que $AM - MA = \lambda M$ et donc, en reprenant la définition d'une image, il vient :

   $$\lambda M \in Im(\varphi_A)$$

Or, en reprenant le résultat de la question 2, on sait que :

$$Im(\varphi_A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\lambda M = x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\lambda \neq 0$, on a également :

$$M = \frac{x}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{y}{\lambda} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vient ainsi de montrer que les vecteurs propres associés à λ sont également dans $Im(\varphi_A)$. Il existe donc a et b deux réels tels que :

$$M = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En réutilisant la matrice C, on a alors :

$$\varphi_A(M) = \lambda M \Leftrightarrow C \begin{pmatrix} -b \\ -a \\ a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ -a \\ a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a &= -\lambda b \\ 4b &= -\lambda a \\ -4b &= \lambda a \\ -4a &= \lambda b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{4}{\lambda} a \quad \text{car } \lambda \neq 0 \\ \\ -\dfrac{16}{\lambda} a = -\lambda a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\dfrac{4}{\lambda} a \quad \text{car } \lambda \neq 0 \\ \\ a = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 = 16 \end{cases}$$

On en déduit que λ est valeur propre de φ_A si, et seulement si, le système $\varphi_A(M) = \lambda M$ n'est pas de Cramer, c'est-à-dire si, et seulement si, $\lambda = 4$ ou $\lambda = -4$.

Finalement, $0, 4$ et -4 sont les valeurs propres de φ_A.

Le sous-espace propre de φ_A associé à la valeur propre 0 est $\text{Ker}(\varphi_A)$ de dimension 2.

Le sous-espace propre E_4 de φ_A associé à la valeur propre 4 admet pour base

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Le sous-espace propre E_{-4} de φ_A associé à la valeur propre -4 admet pour base

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

On a :

$$\dim \operatorname{Ker}(\varphi_A) + \dim(E_4) + \dim(E_{-4}) = 2 + 1 + 1 = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})).$$

On en déduit que φ_A est diagonalisable.

■ **Remarque** Bien retenir la marche à suivre ici qui n'est pas si évidente et qui permet de bien faire le lien entre endomorphisme et matrice représentative, mais aussi entre vecteurs d'un espace vectoriel et leur représentation dans une base de ce même espace (ici il s'agit de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). ■

Partie II

1. On sait que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

2. Comme B est vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ, on sait que :

$$\varphi_A(B) = \lambda B,$$

c'est-à-dire

$$AB - BA = \lambda B.$$

Initialisation

Pour $k = 0$, on a :

$$\varphi_A(B^0) = \varphi_A(I_n) = AI_n - I_nA = A - A = 0_n = \lambda \times 0B^0.$$

La propriété est initialisée.

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_A(B) = \lambda k B^k$.

En multipliant à droite par B, on obtient :

$$AB^{k+1} - B^kAB = \lambda k B^{k+1} \quad (*).$$

Or B étant vecteur propre de λ associé à la valeur propre λ, on a :

$$AB = BA + \lambda B.$$

On en déduit que

$$B^kAB = B^k(BA + \lambda B) = B^{k+1}A + \lambda B^{k+1}.$$

L'égalité (*) devient alors :

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A - \lambda B^{k+1} = k\lambda B^{k+1},$$

soit :

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = \lambda(k+1)B^{k+1},$$

ce qui montre l'hérédité.

Conclusion

On déduit du principe de récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_A(B^k) = \lambda k B^k.$$

3. Supposons que pour tout $d \in \mathbb{N}$ $B^d \neq 0_n$.

   On déduit de la question précédente que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, B^d est vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre λd.

   Comme $\lambda \neq 0$, on remarque que $x \mapsto \lambda x$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

   On vient donc de montrer que φ_A admet une infinité de valeurs propres distinctes.

   Or φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie n^2.

   On sait donc que φ_A admet au plus n^2 valeurs propres distinctes.

   On aboutit à une contradiction.

   Ainsi, il existe un entier naturel d tel que $B^d = 0_n$.

Partie III

1. On remarque que $\varphi_A(I_n) = A - A = 0_n$ avec $I_n \neq 0_n$.

   On en conclut que 0 est valeur propre de φ_A (I_n étant un vecteur propre associé).

2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

   On a :

   $$B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A) \iff \varphi_A(B) = 0_n \iff AB - BA = 0_n \iff AB = BA \iff u \circ v = v \circ u.$$

3. a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

      Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie égale à n^2, la famille $(I_n, M, M^2, \ldots, M^{n^2})$ est nécessairement liée.

Par conséquent, il existe n^2+1 réels $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k M^k = 0_n.$$

Notons $P = \sum_{k=1}^{n^2} a_k X^k$ P est donc un polynôme annulateur non nul de M.

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Comme II est un polynôme non nul, on a d'après le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple de polynôme (Q, R) tel que

$$P = II.Q + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(II) = d.$$

c) Comme $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant les matrices

$$I_n = A^0, A, \ldots, A^{d-1},$$

on a :

$$\text{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1}) \subset \mathbb{R}[A],$$

car $\mathbb{R}[A]$ est stable par combinaisons linéaires.

Réciproquement, soit $P(A) \in \mathbb{R}[A]$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$.
D'après la question précédente, il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P = II.Q + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(II) = d.$$

On alors :

$$P(A) = II(A).Q(A) + R(A) = R(A), \quad \text{car} \quad II(A) = 0_n.$$

De plus, comme $\deg(R) < d$, on a : $R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$.

On a donc :

$$P(A) = R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1}).$$

Ainsi, par double inclusion, on a montré :

$$\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$$

et $(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[A]$.

Soient $a_0, a_1, ..., a_{d-1}$ d réels tels que

$$\sum_{k=0}^{d-1} a_k A^k = 0_n.$$

On en déduit que $P = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à $d-1$.

Or II est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal.

On en déduit que nécessairement $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $a_0 = a_1 = ... = a_{d-1} = 0$.

La famille $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est donc libre.

Finalement :

$$\boxed{(I_n, A, \dots, A^{d-1}) \text{ est une base de } \mathbb{R}[A]}$$

Point méthodologique 3.

Pour montrer qu'un espace vectoriel F est inclus dans un autre espace vectoriel E, il suffit de montrer que les vecteurs d'une base de F appartiennent à E. On invoque alors la stabilité de E par combinaisons linéaires pour conclure.

Pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$,

$$\varphi_A(A^k) = A.A^k - A^k.A = A^{k+1} - A^{k+1} = 0_n.$$

D'où $A^k \in \text{Ker}(\varphi_A)$ pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$.

Comme $\text{Ker}(\varphi_A)$ est stable par combinaisons linéaires, on en déduit que

$$\mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1}) \subset \text{Ker}(\varphi_A).$$

d) Un point méthodologique s'impose ici !

Point méthodologique 4.

On peut hésiter ici entre deux méthodes : la double inclusion ou l'inclusion et l'égalité des dimensions.

On constate alors que si $Im(\varphi_A) = \mathcal{T}$ alors le noyau sera de dimension 1. Comme dans toute cette question, on a trouvé des résultats sur le noyau, on va donner une chance à cette méthode et, bien sûr, ça va marcher !

Supposons que u n'est pas une homothétie : il n'existe pas de réel λ tel que $u = \lambda id$, c'est-à-dire tel que $A = \lambda I_n$.

D'après le préliminaire, on a $Im(\varphi_A) \subset \mathcal{T}$ donc $\dim Im(\varphi_A) \leqslant \dim \mathcal{T} = n^2 - 1$.

Procédons par l'absurde et supposons que $\dim Im(\varphi_A) = n^2 - 1$. Par le théorème du rang, il vient :

$$\dim \text{Ker}(\varphi_A) = 1$$

Et d'après c, il vient :

$$\dim \mathbb{R}(A) \leqslant 1$$

Et donc, en reprenant la base de $\mathbb{R}(A)$:

$$\dim Vect(I_n, A, \ldots, A^{d-1}) \leqslant 1$$

Or, u n'est pas une homothétie donc on montre aisément que la famille (I_n, A) est libre (I_n et A sont non colinéaires) et par conséquent :

$$\dim Vect(I_n, A, \ldots, A^{d-1}) \geqslant 2$$

On vient de faire apparaître une contradiction, on peut donc conclure avec joie :

$$\boxed{Im(\varphi_A) \neq \mathcal{T}}$$

4. a) Comme $A^n = 0_n$, on a $u^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ et donc $u^i = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $i \geq n$.

Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ n réels tels que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k = 0_{\mathbb{R}^n},$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k u^{n-k}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

En composant cette égalité par u^{n-1}, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} u^{n-k+n-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

soit $a_n u^{n-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car pour tout $k \leq n-1, n-k+n-1 \geq n$.

Comme $u^{n-1}(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on en déduit que $a_n = 0$.

Composons alors l'égalité $\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{n-k}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ par u^{n-2}.

On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-2} a_k u^{n-k+n-2}(x) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

soit $a_{n-1} u^{n-1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car pour tout $k \leq n-2, n-k+n-2 \geq n$. On en déduit de même que $a_{n-1} = 0$.

En réitérant le procédé (on compose par $u^{n-3}, ..., u, id$), on obtient successivement :

$$a_{n-3} = ... = a_2 = a_1 = a_0.$$

Ainsi, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une famille libre maximale de $\mathbb{R}^n$, donc une base de $\mathbb{R}^n$.

■ **Remarque** Cette question est un grand classique du concours, tombée par exemple à HEC 2007 sous une forme matricielle. A savoir refaire parfaitement. Les plus rigoureux auront remarqué que l'idéal aurait été de faire une récurrence descendante forte afin d'éviter l'itération que certains correcteurs n'apprécient pas. A ce niveau du sujet et compte tenu de la longueur de l'épreuve, cela peut toutefois passer. ■

b) Soit $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$.

Comme $v(x) \in \mathbb{R}^n$, on déduit de la question précédente, par définition d'une base, qu'il existe $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$v(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

Point méthodologique 5.

Comme $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et que les applications v et $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}$ sont linéaires, pour montrer que $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}$, il suffit d'utiliser la base que l'on vient de former et ainsi montrer que $v(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}(e_i)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Nous voyons encore ici l'utilité des bases pour résoudre certaines questions d'algèbre linéaire...

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

On a : $e_i = u^{n-i}(x)$. Et donc :

$$\begin{aligned}
v(e_i) &= v \circ u^{n-i}(x) \\
&= u^{n-i} \circ v(x) \quad \text{car } B \in \text{Ker}(\varphi_A) \text{ donc } u \text{ et } v \text{ commutent, et donc } v \text{ et } u^{n-i} \text{ commutent} \\
&= u^{n-i}(\varphi_A(x)) = u^{n-i}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-i+n-k}(x) \quad \text{car } u^{n-i} \text{est linéaire} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k} \circ u^{n-i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}(u^{n-i}(x)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}(e_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}\right)(e_i)
\end{aligned}$$

On déduit de la remarque préliminaire que :

$$\boxed{v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}}$$

■ **Remarque** Lorsque u et v commutent, bien retenir que u^i et v commutent. Faites le cas $i = 2$ pour vous en convaincre et ensuite, en toute rigueur, faites une récurrence qui ne pose pas de difficulté. ■

c) On déduit de la question b) que si $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$, alors

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k},$$

soit

$$B = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A^{n-k} \in \text{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1}).$$

On a donc l'inclusion :

$$\text{Ker}(\varphi_A) \subset \text{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1}).$$

Or, d'après la question 2.c), on a :

$$\mathbb{R}[A] \subset \text{Ker}(\varphi_A).$$

On remarque alors que $\text{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[A]$.

On en déduit que :

$$\text{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1}) \subset \text{Ker}(\varphi_A).$$

Finalement, par double inclusion :

$$\boxed{\text{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1}) = \text{Ker}(\varphi_A)}$$

et $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est une famille génératrice de $\text{Ker}(\varphi_A)$.

Notons que l'on a montré à la question 2.c) que $\mathbb{R}[A] \subset \text{Ker}(\varphi_A)$.

Et on vient de montrer que :

$$\text{Ker}(\varphi_A) = \text{Vect}(I_n, A, ..., A^{n-1}) \subset \mathbb{R}[A].$$

On a donc : $\text{Ker}(\varphi_A) = \mathbb{R}[A]$ dans ce cas.

Montrons que $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est une famille libre de $\text{Ker}(\varphi_A)$.

Soient $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ n réels tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0_n.$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}.$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e_{n-k}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Comme $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que $\alpha_0 = ... = \alpha_n = 0$.

Finalement, $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est une famille libre de $\text{Ker}(\varphi_A)$.

Comme elle est de plus génératrice de $\text{Ker}(\varphi_A)$, on en déduit que c'est une base de $\text{Ker}(\varphi_A)$.

D'où

$$\dim(\text{Ker}(\varphi_A)) = n.$$

5. a) Supposons que u est une homothétie. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda id$, c'est-à-dire tel que $A = \lambda I_n$.

Pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi_A(B) = AB - BA = \lambda I_n B - B(\lambda I_n) = \lambda B - \lambda B = 0_n, \text{ et donc } B \in \text{Ker}(\varphi_A).$$

On en déduit que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \in \text{Ker}(\varphi_A)$. Et $\text{Ker}(\varphi_A)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $\text{Ker}(\varphi_A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) i. Si u est une homothétie, alors $u = \lambda id$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = \lambda x$ et la famille $(x, u(x))$ est bien liée.

Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

Point méthodologique 6.

Cette partie de la démonstration est difficile mais classique. Le même type de raisonnement est par exemple tombée à l'ESCP 2001. Ici, il faut se poser au brouillon et tenter des choses. Une fois de plus, la prise d'initiatives est valorisée. Notamment, il faut bien utiliser l'hypothèse selon laquelle la famille est liée POUR TOUT $x \in \mathbb{R}^n$. Voyons comment.

Notons $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La famille $(e_i, u(e_i))$ est liée.

Comme $e_i \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, il existe un réel λ_i tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

■ **Remarque** On vient au passage de montrer que u est diagonalisable... Pour aller plus loin, on va considérer le vecteur $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$. ■

De même, comme la famille $\left(\sum_{k=1}^{n} e_k, u\left(\sum_{k=1}^{n} e_k\right)\right)$ est liée et que $\sum_{k=1}^{n} e_k \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u\left(\sum_{k=1}^{n} e_k\right) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} e_k\right).$$

Or par linéarité de u, on a :

$$u(\sum_{k=1}^{n} e_k) = \sum_{k=1}^{n} u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

On a donc montré que :

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Comme la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre, on en déduit que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda.$$

On remarque que les deux applications linéaires u et λid coïncident sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent : $u = \lambda id$ et u est bien une homothétie.

ii. Supposons que $\text{Ker}(\varphi_A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Point méthodologique 7.

Sur cette question, il faut vraiment se laisser porter par l'indice mais sans trop chercher à comprendre pourquoi car c'est trop abstrait pour que l'on puisse visualiser quoi que ce soit. En revanche, on a une certitude absolue : il va falloir utiliser la question précédente et montrer que la famille $(x, u(x))$ est liée.

On en déduit que pour tout $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $u \circ v = v \circ u$.

Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Notons H_x un supplémentaire de $\text{Vect}(x)$ dans $\mathbb{R}^n$, et notons p_x la projection sur $\text{Vect}(x)$ parallèlement à H_x.

Comme p_x et u commutent, on a :

$$u \circ p_x(x) = p_x \circ u(x).$$

Or par définition : $p_x(x) = x$. On a donc :

$$u(x) = p_x(u(x)).$$

p_x étant la projection sur $\text{Vect}(x)$ parallèlement à H_x, on sait que

$$\text{Ker}(id - p_x) = Im(p_x) = \text{Vect}(x).$$

On en déduit que $p_x(u(x)) \in \text{Vect}(x)$, ce qui entraîne que la famille $(x, u(x))$ est liée.

On déduit de la question précédente que u est bien une homothétie.

6. a) Comme u est diagonalisable, on a :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^{p} E_u(\lambda_k).$$

Par conséquent, la famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^n$.

b) On va se reposer sur la méthode, une fois de plus.

Point méthodologique 8.

Il suffit de procéder par implication puis réciproque et de bien poser ce que l'on a et ce que l'on cherche et probablement utiliser la question précédente.

Soit $B \in \text{Ker}(\varphi_A)$. Comme $\varphi_A(B) = 0_n$, on sait que $AB = BA$ et donc u et v commutent.

Soit $x \in E_u(\lambda_k)$. Rappelons que $E_u(\lambda_k) = \text{Ker}(u - \lambda_k id)$.

Montrons que $v(x) \in E_u(\lambda_k)$.

On a :

$$\begin{aligned}(u-\lambda_k id)(v(x)) &= u(v(x)) - \lambda_k v(x) = u\circ v(x) - \lambda_k v(x) = v\circ u(x) - \lambda_k v(x)\\ &= v\circ(u-\lambda_k id)(x) = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{car} \quad B \in \mathrm{Ker}(u-\lambda_k id).\end{aligned}$$

D'où $v(x) \in E_u(\lambda_k)$.

Ainsi, si $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Supposons maintenant que les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Pour montrer que $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$, il suffit de montrer que u et v commutent.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $\mathbb{R}^n = \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} E_u(\lambda_k)$, il existe $(x_1, x_2, ..., x_p) \in E_u(\lambda_1) \times E_u(\lambda_2) \times ... \times E_u(\lambda_p)$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k.$$

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\quad x_k \in E_u(\lambda_k)$, donc

$$u(x_k) = \lambda_k x_k$$

et $v(x) \in E_u(\lambda_k)$ d'après la question précédente, donc

$$u(v(x_k)) = \lambda_k v(x_k).$$

On a alors :

$$u\circ v(x) = \sum_{k=1}^{p} u\circ v(x_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(x_k)$$

et

$$v\circ u(x_k) = \sum_{k=1}^{p} v\circ u(x_k) = \sum_{k=1}^{p} v(\lambda_k x_x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v(x_k).$$

D'où

$$v\circ u(x_k) = u\circ v(x).$$

Les endomorphismes u et v commutent et donc $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

c) On déduit de la question précédente que B est un vecteur de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ si, et seulement si, la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_p \end{pmatrix},$$

avec $B_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{R})$ la matrice de la restriction de v à $E_u(\lambda_i)$ relativement à la base de $\mathcal{B}_i$.

d) L'espace vectoriel des matrices diagonales par blocs de la forme ci-dessus est de dimension

$$m_1^2 + m_2^2 + ... + m_p^2.$$

On déduit de la question précédente que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = \sum_{k=1}^{p} m_k^2.$$

Partie IV

1. a) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
Posons $C = AE_{i,j}$ et $D = E_{i,j}A$, avec $C = (c_{p,q})_{1\leq p,q\leq n}$ et $D = (d_{p,q})_{1\leq p,q\leq n}$.

On a, pour tout $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$c_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} a_{p,k}(E_{i,j})_{k,q} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q \neq j \\ a_{p,i} & \text{si} \quad q = j \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q \neq j \quad \text{et} \quad p \neq i \\ \lambda_i & \text{si} \quad (p,q) = (i,j) \end{cases}$$

et

$$d_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (E_{i,j})_{p,k} a_{k,q} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \neq i \\ a_{j,q} & \text{si} \quad p = i \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q \neq j \quad \text{et} \quad p \neq i \\ \lambda_j & \text{si} \quad (p,q) = (i,j) \end{cases}$$

On en déduit que

$$\varphi_A(E_{i,j}) = \lambda_i E_{i,j} - \lambda_j E_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}.$$

b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Comme $E_{i,j} \neq 0_n$, on déduit de la question précédente que $E_{i,j}$ est vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$.

On en déduit que $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de φ_A.

On peut immédiatement conclure que φ_A est diagonalisable.

2. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On pose $B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$.

On a :

$$\varphi_A(B_{i,j}) = AB_{i,j} - B_{ij}A = PDP^{-1}B_{ij} - B_{i,j}PDP^{-1}$$

$$= PDE_{i,j}P^{-1} - PE_{i,j}DP^{-1} = P(DE_{i,j} - E_{i,j}D)P^{-1}$$

$$= P((\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j})P^{-1} \quad \text{d'après la question 1.a)}$$

$$= (\lambda_i - \lambda_j)PE_{i,j}P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}$$

Comme de plus $E_{i,j} \neq 0_n$ et que les matrices P et P^{-1} sont inversibles, on en déduit que $B_{i,j} \neq 0_n$.

On peut alors conclure que $B_{i,j}$ est vecteur propre de φ_A associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$.

Vérifions que $(B_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$ tel que

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{i,j}B_{i,j} = 0_n.$$

En multipliant cette égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{i,j}E_{i,j}0_n$$

et donc $b_{i,j} = 0$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, car $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, $(B_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une famille libre maximale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})(\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2)$, donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en conclut que φ_A est diagonalisable car il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de φ_A.

3. a) i. Comme φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.

   ii. Soit $z \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.

   La matrice $A - zI_n$ n'est pas inversible. Donc la matrice ${}^t(A - zI_n)$ n'est pas inversible (car on sait que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M est inversible si, et seulement si, ${}^tM$ est inversible).

   Or

$${}^t(A - zI_n) = {}^t A - z{}^t I_n = {}^t A - zI_n.$$

On en déduit que ${}^tA - zI_n$ n'est pas inversible et donc z est également valeur propre de ${}^tA$.

iii. Soit $z \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Notons $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé : $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ et $AX = zX$.

Notons $\overline{X}$ le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de X.

De même, on note $\overline{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A.

Comme A est une matrice à coefficients réels, on a : $\overline{A} = A$.

On remarque que $AX = zX \Longrightarrow \overline{AX} = \overline{zX}$, soit $\overline{AX} = \overline{z}\overline{X}$, d'après les règles de calculs dans $\mathbb{C}$

$$(\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}).$$

On a montré : $A\overline{X} = \overline{z}\overline{X}$.

Comme X n'est pas nulle, $\overline{X}$ n'est pas nulle.

On en conclut que $\overline{z}$ est bien valeur propre de A.

iv. Soit z une valeur propre de A.

Il existe donc une matrice-colonne non nulle X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $AX = zX$.

On déduit de iii que $\overline{z}$ est également valeur propre de A.

Et la question ii appliquée à la valeur propre $\overline{z}$ montre que $\overline{z}$ est valeur propre de ${}^tA$. Il existe donc une matrice-colonne non nulle Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que ${}^tAY = \overline{z}Y$.

On a :

$$\begin{aligned}\varphi_A(X\ {}^tY) &= AX\ {}^tY - X\ {}^tYA = (zX)\ {}^tY - X{}^t({}^tAY)\\ &= zX\ {}^Y - X\ {}^(\overline{z}Y) = zX\ {}^tY - \overline{z}X\ {}^tY = (z-\overline{z})X\ {}^tY.\end{aligned}$$

De plus, la matrice $X\ {}^tY$ n'est pas nulle :

comme $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ n'est pas nulle, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \neq 0$ et de même en

notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $y_j \neq 0$, et donc

$$(X\ {}^tY)_{i,j} = x_i \times y_j \neq 0.$$

On en conclut que $z - \overline{z}$ est bien valeur propre de φ_A.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.

On déduit de la question précédente que $z - \overline{z}$ est valeur propre de φ_A, et donc $z - \overline{z} = 2Im(z) \in \mathbb{R}$ d'après i.

On en déduit que $Im(z) = 0$ et donc $z \in \mathbb{R}$.

Les valeurs propres de A sont donc réelles.

c) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On sait que

$$\varphi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j} P_{i,j}$$

soit

$$AP_{i,j} = P_{i,j}A + \lambda_{i,j}P_{i,j}.$$

On en déduit que :

$$AP_{i,j}X = (P_{i,j}A + \lambda_{i,j}P_{i,j})X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = \lambda P_{i,j}X + \lambda P_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$$
$$\text{avec} \quad \mu_{i,j} = \lambda + \lambda_{i,j}.$$

d) Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Comme X n'est pas nulle (X est vecteur propre de A), il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_i \neq 0$.

Notons $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$.

On remarque

$$\Phi\left(\frac{1}{x_i}E_{p,i}\right) = \frac{1}{x_i}E_{p,i}X = E_p$$

et donc $E_p \in Im(\Phi)$.

L'application Φ étant linéaire, son image est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc stable par combinaisons linéaires.

On déduit du calcul précédent que $\text{Vect}(E_1, ..., E_n) \subset Im(\Phi)$.

Or $\text{Vect}(E_1, ..., E_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On peut alors conclure que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = Im(\Phi)$ et donc Φ est surjective.

e) Vérifions que $(P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{\backslash,\infty}(\mathbb{R})$.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Comme Φ est surjective, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(M) = Y$.

$(P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ étant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit qu'il existe

$$(m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$$

tel que

$$M = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j} P_{i,j}.$$

Par linéarité de Φ, on obtient :

$$Y = \Phi(M) = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}\Phi(P_{i,j}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j} P_{i,j} X.$$

On a donc montré que tout vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ s'écrit comme combinaison linéaire de s vecteurs de la famille $(P_{i,j}X)_{1\leq i,j\leq n}$, ce qui montre que $(P_{i,j}X)_{1\leq i,j\leq n}$ est bien une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On peut alors extraire de la famille $(P_{i,j}X)_{1\leq i,j\leq n}$ une famille libre maximale $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La famille $\mathcal{B}$ est alors une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A d'après la question c) (les vecteurs sont bien non nuls puisqu'ils appartiennent à une famille libre).

On peut alors conclure que A est bien diagonalisable.

Partie V

1. Comme A est diagonalisable, A admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2.

Supposons que $\lambda_1 = \lambda_2$. Comme A est diagonalisable, il existe P inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} = P(\lambda_1 I_2)P^{-1} = \lambda_1 I_2$$

et donc $u = \lambda_1 id$.

Or par hypothèse, u n'est pas une homothétie. On en conclut que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
La matrice A admet donc deux valeurs propres distinctes.

En reprenant les notations de la partie III question 5, on a : $p = 2$ et $m_1 = m_2 = 1$.

On déduit de la question III.6.d) que :

$$\dim \mathrm{Ker}(\varphi_A) = 1^2 + 1^2 = 2.$$

D'après la question III.3.c), on a :

$$\mathbb{R}[A] \subset \mathrm{Ker}(\varphi_A).$$

On en déduit que (I_2, A) est une famille de vecteurs de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

2. Comme A est diagonalisable, φ_A est diagonalisable d'après IV.2.

   On a montré à la question IV.2 que les valeurs propres de φ_A sont :

   $$\lambda_1 - \lambda_1,\ \lambda_1 - \lambda_2,\ \lambda_2 - \lambda_1,\ \lambda_2 - \lambda_2.$$

   En posant $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, on a bien vérifié que les valeurs propres de φ_A sont : $0, \lambda$ et $-\lambda$ (deux à deux distinctes car $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

3. Comme B est vecteur propre de φ_A associé à $\lambda \neq 0$, on sait qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $B^d = 0_2$, d'après II.3.

   On en déduit que B n'est pas inversible.

   Vérification :

   Supposons que B est inversible. Il existe $B^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^{-1}B = 0_2$.

   Alors :

   $$(B^-1)^d.B^d = I_2.$$

   Or

   $$(B^-1)^d.B^d = (B^-1)^d.0_2 = 0_2. \quad \text{Il y a donc contradiction.}$$

   Comme $\varphi_A(B) = \lambda B$ avec $\lambda \neq 0$,on a par linéarité de

   $$\varphi_A : \varphi_A\left(\frac{1}{\lambda}B\right) = B$$

   et donc $B \in Im(\varphi_A)$.

   On en déduit de la question 4 du préliminaire que : $Tr(B) = 0$.

Posons alors :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad (\text{car } \ Tr(B) = 0).$$

Comme B n'est pas inversible, on sait que $\det(B) = 0$ soit :

$$-a^2 - bc = 0.$$

On en déduit que :

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = 0_2.$$

4.Comme B est vecteur propre de φ_A, $B \neq 0_2$, et on vient de montrer que $B^2 = 0_2$.

La question III.4.a) appliquée à la matrice B dans le cas $n = 2$ montre qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, v(x))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

Comme $u(x) \in \mathbb{R}^2$ et que $(x, v(x))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, il existe deux réels α et β tels que $u(x) = \alpha x + \beta v(x)$.

Et comme $\varphi_A(B) = \lambda B$,

On a :

$$AB - BA = \lambda A,$$

soit : $u \circ v = v \circ u + \lambda v$. On a donc :

$$\begin{aligned} u(v(x)) = u \circ v(x) &= v \circ u(x) + \lambda v(x) = v(\alpha x + \beta v(x)) + \lambda v(x) \\ &= \alpha v(x) + \beta v^2(x) + \lambda v(x) = (\alpha + \lambda) v(x), \end{aligned}$$

car $B^2 = 0_2$ donc $v^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

La matrice de u dans la base $(x, v(x))$ est donc :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \lambda + \alpha \end{pmatrix}.$$

Comme M est triangulaire inférieure, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale.

D'où $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(M) = \{\alpha, \alpha + \lambda\}$.

De plus, d'après la matrice M, on a :

$$Tr(M) = 2\alpha + \lambda,$$

soit

$$\alpha = \frac{Tr(M) - \lambda}{2}$$

.

Enfin, on a montré dans le préliminaire que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ont la même trace.

On en déduit que $Tr(M) = Tr(A)$ car A et M représentent le même endomorphisme u dans des bases éventuellement distinctes de $\mathbb{R}^2$, elles sont donc semblables d'après la formule de changement de base.

On a donc bien :

$$\mathrm{Sp}(u) = \left\{ \frac{Tr(M) - \lambda}{2}, \frac{Tr(M) + \lambda}{2} \right\}.$$

■