Problème de synthèse
Autour de la médiane d'une variable alátoire réelle

On établit dans la partie I des résultats d'analyse utilisés dans la suite du problème ; dans la partie II, on définit l'intervalle médian d'une variable aléatoire et on étudie certaines propriétés (dans certains cas particuliers puis dans le cas général), et, dans la partie III, on détermine l'intervalle médian d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.

Partie I

Soit Ψ la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in]0,1[, \quad \Psi(x) = \dfrac{-x - \ln(1-x)}{x^2} \\ \\ \Psi(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. a) Etablir que Ψ réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

   b) En déduire que :
   $$\forall\, x \in [0,1], \quad 0 \ \leq\ (1-x)\ e^x \ \leq\ e^{\frac{x^2}{2}}$$

   c) Soit $\sigma \in]0,1[$.

   Prouver qu'il existe un réel $\delta \in]0,1[$ tel que :
   $$\Psi(\delta) = \frac{1}{2\sigma^2}$$
   puis que :
   $$\forall\, x \in [0,\delta], \quad (1-x)\ e^x \ \geq\ e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-n\frac{t^2}{2}}\, dt$ existe et déterminer sa valeur.

b) On définit la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^1 ((1-t)e^t)^n \, dt.$$

Etablir que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \;\leq\; \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Montrer également que :

$$\forall\, \sigma \in]0,1[, \quad \exists \delta \in]0,1[\;/\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt \;\leq\; I_n.$$

3. Soit $\varepsilon \in]0,1[$.

a) Déduire de la question précédente et à l'aide d'un choix judicieux de σ, que :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* \;/\; \forall\, n \;\geq\; n_0, \quad 1-\varepsilon \;\leq\; \sqrt{\frac{2n}{\pi} I_n} \;\leq\; 1+\varepsilon.$$

b) Déterminer alors un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$

Partie II

Soient (Ω, τ, P) un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle définie sur (Ω, τ, P) et F la fonction de répartition de X. On appelle ensemble des médianes (ou intervalle médian) de X l'ensemble $M(X)$ défini par :

$$M(X) = \{m \in \mathbb{R} \;/\; P([X < m]) \;\leq \frac{1}{2} \;\leq\; P([X \leq m])\}.$$

A. **Quelques propriétés de $M(X)$**

1. Peut-on avoir $M(X) = \mathbb{R}$?

2. Soient a et b deux éléments distincts de $M(X)$ avec $a < b$, et c un réel de $]a,b[$.

   Prouver que c appartient à $M(X)$.

   Que peut-on en déduire ?

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$M(X+a) = \{m+a,\ m \in M(X)\},$$

et que

$$M(aX) = \{am,\ m \in M(X)\}.$$

B. **Cas discret**

On étudie dans cette partie le cas où X est une variable aléatoire réelle discrète.

1. a) On suppose que la fonction de répartition F prend la valeur $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'il existe α, un réel tel que $F(\alpha) = \frac{1}{2}$.

   Montrer que $M(X)$ est un segment.

   b. On suppose maintenant que F ne prend pas la valeur $\frac{1}{2}$.

   Montrer que $M(X)$ est alors réduit à un point.

2. On suppose dans cette question que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

   Déterminer $M(X)$ (on distinguera les cas selon la valeur de p).

3. On suppose dans cette question que X suit la loi binomiale de paramètres n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\frac{1}{2}$.

   a) Montrer que :
   $$\forall\ k \in [\![0,n]\!], \quad P([X \ \leq \ k]) = P([X \ \geq \ n-k]).$$

   b. En déduire $M(X)$ (on distinguera les cas suivants la parité de n).

4. Soit Y une variables aléatoires discrètes.

   A-t-on :
   $$M(X+Y) = \{m+n,\ (m,n) \in M(X) \times M(Y)\} \ ?$$

5. On suppose dans cette question que X admet une espérance et une variance.

   Montrer que :
   $$\forall\ m \in M(X), |m - E(X)| \leq \sqrt{2}\sigma(X)$$
   (on distinguera les cas selon la position de m par rapport à $E(X)$).

C. **Cas continu**

On étudie dans cette partie le cas où X est une variable aléatoire à densité, dont une densité est une fonction f.

1. a) Peut-on avoir $M(X) = \emptyset$?

   b) Déterminer $M(X)$ si X suit la loi normale centrée réduite.

   c) On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda(\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$.

   Déterminer $M(X)$ et montrer que :
$$E(X) \notin M(X).$$

2. Soit $(a,b) \in (\bar{\mathbb{R}})^2, \quad a \leq b$.

   On suppose, dans cette question, que f est continue et strictement positive sur $]a,b[$ et nulle en dehors de $[a,b]$ (si $]a,b[\neq \mathbb{R}$).

   On note F sa fonction de répartition.

   a) Montrer que la restriction F_1 de F à $]a,b[$ réalise une bijection de $]a,b[$ sur $]0,1[$.

   b) En déduire que :
$$\exists!\ m_0 \in]a,b[, \quad F(m_0) = \frac{1}{2},$$
   puis que :
$$M(X) = \{m_0\}$$

   c) Que peut-on dire si f n'est pas strictement positive sur $]a,b[$?

3) On suppose, dans cette question, que f est continue et positive sur $]a,b[$ et nulle en dehors de $[a,b]$ (si $]a,b[\neq \mathbb{R}$), et que X admet une espérance et une variance.

   Montrer que :
$$\forall\ m \in M(X),\ |m - E(X)| \leq \sqrt{2}\sigma(X).$$

Partie III

Toutes les variables aléatoires de cette partie sont supposées définies sur un même espace probabilisé (Ω, τ, P).

On définit la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad P_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

1. a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \int_0^x e^{-u} u^n \, du = n!\, (1 - P_n(x))$$

   b) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad 1 - P_n(n) = \frac{e^{-n}\ n^{n+1}}{n!}\ I_n,$$

   où $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie en partie I.

   c) Ecrire un programme en Scilab permettant de calculer et d'afficher la valeur de $P_n(n)$ pour un entier naturel n non nul entré par l'utilisateur.

2. Etablir à l'aide des résultats de la partie I que :

$$1 - P_n(n) \sim \frac{n^n}{n!}\ e^{-n}\sqrt{\frac{\pi n}{2}}$$

3. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une même loi de Poisson de paramètre 1.

   On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires S_n et Y_n par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \\[2ex] Y_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

   b) En déduire à l'aide de la suite de variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}$$

puis que (Formule de Stirling) :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \ \sqrt{2\pi n}.$$

4. a) Montrer que :

$$\forall\ n \in [2, +\infty[, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n-1}(x) = P_n(x) + P_n'(x).$$

   b) Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que la suite $(P_n(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et que la suite $(P_{n1}(n))_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

   c) Prouver alors que les suites $(P_n(n)_{n\ \geq\ 2})$ et $(P_{n-1}(n)_{n\geq 2})$ sont adjacentes.

   d) En déduire que, si X suit une loi de Poisson de paramètre $n(n \in \mathbb{N}^*)$, on a :

$$M(X) = \{n\}.$$

Correction

Partie I

1. a) Ψ est continue sur $]0, 1[$ comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $]0, 1[$.

   De plus, au voisinage de 0, on a :

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

   où

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

   d'où

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$$

   et donc

$$\lim_{x\to 0} \Psi(x) = \frac{1}{2}$$

$$= \Psi(0).$$

   Psi est donc continue en 0, et on peut conclure :

$$\boxed{\Psi \ \text{ est continue sur } [0,1[.}$$

b) Ψ est dérivable sur $]0,1[$ et on a :

$$\forall\ x\in]0,1[,\ \ \Psi'(x)=\frac{x^2(-1+\dfrac{1}{1-x})-2x(-x-\ln(1-x))}{x^4}$$

$$=\frac{x+\dfrac{x}{1-x}+2\ln(1-x)}{x^3}.$$

Soit alors φ la fonction définie sur $[0,1[$ par :

$$\forall\ x\in[0,1[,\quad \varphi(x)=x+\frac{x}{1-x}+2\ln(1-x)$$

φ est dérivable sur $[0,1[$ et :

$$\forall\ x\in\ [0,1[,\quad \varphi'(x)=1+\frac{1-x+x}{(1-x)^2}-\frac{2}{(1-x)}$$

$$=\frac{(1-x)^2+1-2(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$$

Ainsi :

$$\forall\ x\in]0,1[,\quad \varphi'(x)\ >\ 0.$$

Comme $\varphi(0)=0$ et comme φ est strictement croissant sur $]0,1[$:

$$\forall\ x\in]0,1[,\quad \varphi(x)\ >\ 0$$

donc :

$$\forall\ x\in]0,1[,\quad \Psi'(x)\ >\ 0.$$

Ψ étant continue en 0, elle est strictement croissante sur $[0,1[$.

Etant continue sur $[0,1[$, Ψ établit une bijection de $[0,1[$ sur $[\Psi(0),\lim\limits_{x\to+\infty}\Psi(x)[$

Comme $\Psi(0)=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ \Psi(x)=+\infty$, on peut conclure :

$$\boxed{\Psi \text{ réalise une bijection strictement croissante de } [0,1[\text{ sur } \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[.}$$

2. a) • Comme exponentielle est positive sur $[0,1]$:

$$\forall\, x \in [0,1], \quad 0 \ \leq (1-x)\ e^x.$$

• D'après la question 1.b) :

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad \Psi(x) \ \geq \ \Psi(0)$$

et comme $-x^2 \ \leq \ 0$:

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad -x^2\Psi(x) \ \leq \ -x^2\Psi(0)$$

et exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad \exp(-x^2\ \Psi(x)) \ \leq \ \exp(-x^2\ \Psi(0))$$

soit :

$$\forall\, x \in [0,1[, \quad (1-x)e^x \ \leq \ e^{-\frac{x^2}{2}}$$

De plus, comme $0 \ \leq \ e^{-\frac{1}{2}}$ (l'inégalité reste valable pour $x = 1$).

b) • Comme $\sigma \in]0,1[$, $\sigma^2 \in]0,1[$ donc $\dfrac{1}{2\sigma^2} \in \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

D'après la question 1.b), $\dfrac{1}{2\sigma^2}$ admet un antécédent par Ψ dans $]0,1[$ donc :

$$\boxed{\exists\ \delta \in]0,1[\ /\ \Psi(\delta) = \frac{1}{2\sigma^2}}$$

• Comme Ψ est croissante sur $[0,1[$ et $\delta \in]0,1[$, Ψ est croissante sur $[0,\delta]$ donc :

$$\forall\, x \in [0,\delta], \quad \Psi(x) \ \leq \ \Psi(\delta)$$

et comme $-x^2 \ \leq \ 0$:

$$\forall\, x \in [0,\delta], \quad -x^2\Psi(x) \ \geq \ -x^2\Psi(\delta)$$

et comme exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, x \in [0,\delta], \quad \exp(-x^2\Psi(x)) \ \geq \ \exp(-x^2\Psi(\delta))$$

donc :

$$\boxed{\forall\ x \in [0,\delta], \quad (1-x)e^x \ \geq\ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}$$

3. a) • soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètre 0 et α.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}}$$

est une densité de X donc :

$$\boxed{\forall\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}}\ dt = 1}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a :

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty}\ e^{-n\frac{t^2}{2}}\ dt = 1$$

et comme la fonction $t \mapsto e^{-n\frac{t^2}{2}}$ est pair :

$$2\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{0}^{+\infty}\ e^{-n\frac{t^2}{2}}\ dt = 1$$

soit :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{0}^{+\infty}\ e^{-n\frac{t^2}{2}}\ dt = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

b) • D'après la question 2a) , la fonction $y \mapsto y^n (n \in \mathbb{N}^*)$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \forall\ t \in [0,1], \quad ((1-t)\ e^t)^n\ \leq\ e^{-n\frac{t^2}{2}}.$$

Ces fonctions étant continues sur $[0,1]$, par croissance de l'intégration

On a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n\ \leq\ \int_0^1 e^{-n\frac{t^2}{2}}\ dt$$

et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ e^{-n\frac{t^2}{2}}\ dt\ \geq 0$ (par positivité de l'intégration car cette intégrale converge)

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \ \leq \ \int_0^1 e^{-n\frac{t^2}{2}}\ dt + \int_1^{+\infty}\ e^{-n\frac{t^2}{2}}\ dt$$

et d'après la relation de Chasles et la question précédente :

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \ \leq \ \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $y \mapsto y^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'aprés la question 2.b),

On a :

$$\forall\ \sigma \in]0,1[, \quad \exists \delta \in]0,1[\ /\ \forall\ t \in [0,\delta], \quad ((1-t)e^t)^n \ \geq \ e^{-\frac{t^2 n}{2\sigma^2}}$$

Ces fonctions étant continues sur $[0,\delta]$, par croissance de l'intégration

$$\forall\ \sigma \in]0,1[,\ \exists\ \delta \in]0,1[, \quad \forall \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\delta ((1-t)e^t)^n\ dt \ \geq \ \int_0^\delta e^{-n\frac{t^2}{2\sigma^2}}\ dt.$$

Comme :

$$\forall\ t \in [\delta,1], \quad ((1-t)e^t)^n \ \geq \ 0,$$

Par positivité de l'intégration $(\delta \ < \ 1)$

$$\int_\delta^1 ((1-t)e^t)\ dt \ \geq \ 0$$

et d'après la relation de Chasles :

$$\forall\ \sigma \in]0,1[, \quad \exists\ \delta\ ]0,1[, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \ \geq \ \int_0^\delta\ e^{-\frac{nt^2}{2\sigma^2}}\ dt.$$

Comme $t \mapsto \sqrt{n}\ \dfrac{t}{\sigma}$ est de classe C^1 sur $[0,\delta]$, en effectuant le changement de variable

$$\left\{\ u = \sqrt{n}\frac{t}{\sigma}\right. \quad ,$$

On a :

$$\forall\ \sigma \in]0,1[, \quad \exists\ \delta\ ]0,1[, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ /\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}\frac{\delta}{\sigma}}\ e^{-\frac{u^2}{2}}\ du.$$

De plus, si $\sigma \in]0,1[$, comme $\sqrt{n}\delta \ \geq 0$, $\sqrt{n}\dfrac{\delta}{\sigma} \ \geq \ \sqrt{n}\delta.$

Comme $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est positive, $\displaystyle\int_{\sqrt{u}\delta}^{\sqrt{u}\frac{\delta}{\sigma}}\ e^{-\frac{u^2}{2}}\ du \ \geq \ 0$

et d'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\forall\ \sigma \in]0,1[,\ \exists\ \delta \in]0,1[\ /\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}\ \delta} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt\ \leq\ I_n}$$

4. a) D'aprés la question précédente, on a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\quad \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\ I_n\ \leq\ 1\ \leq 1+\varepsilon \qquad (1)$$

De plus, on a :

$$\forall\ \sigma \in]0,1[,\ \exists\ \delta \in]0,1[,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\quad \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int_0^{\delta\sqrt{u}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt\ \leq\ \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\ I_n \quad (2)$$

Comme $\delta\ >\ 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \delta\sqrt{n} = +\infty$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

et d'après la question 3.a) pour $n = 1$:

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \sigma.$$

D'après la définition de la limite, on a donc :

$$\forall\ \beta\ >\ 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*,\quad \forall\ n\ \geq\ n_0,\quad \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\delta\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt\ \geq\ \sigma - \beta.$$

Ainsi pour $\sigma = 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ $(\sigma \in]0,1[)$ et $\beta = \dfrac{\epsilon}{2}(\beta > 0)$ et d'après (1) et (2)

$$\boxed{\exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*,\quad \forall\ n\ \geq\ n_0,\quad 1-\varepsilon \leq \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n\ \leq\ 1+\varepsilon}$$

b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall\ \varepsilon \in]0,1[,\ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\ n\ \geq\ n_0,\quad \left|\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\ I_n - 1\right|\ \leq\ \varepsilon$$

et donc :

$$\forall\ \varepsilon\ >\ 0,\ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\ n\ \geq\ n_0,\quad \left|\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\ I_n - 1\right|\ \leq\ \varepsilon$$

et par définition de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n = 1$$

Soit

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Partie II

A. 1.

Point méthodologique 1.

On va évidemment raisonner par l'absurde ici. En remplaçant les probabilités en jeu par une fonction de répartition et en connaissant bien les propriétés des fonctions de répartition, on va y arriver sans trop souffrir !

Supposons que $M(X) = \mathbb{R}$.

On a alors en posant F la fonction de répartition de X :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad F(x)\ \geq\ \dfrac{1}{2}$ ce qui est impossible car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{M(X) \neq \mathbb{R}}$$

■ **Remarque** On pouvait aussi raisonner sur la limite de $P(X < m)$ en $+\infty$, qui vaut 1, et arriver à une contradiction. ■

2.

Point méthodologique 2.

Comme souvent lorsqu'il y a des inégalités portant sur des probabilités, on raisonnera souvent à l'aide d'inclusion d'événements. Reste à trouver ici les bons événements à comparer. En posant bien ce que l'on a et ce que l'on cherche, cela apparaît assez clairement...

- On a :

$[X < c] \subset [X < b]$ donc :

$P(X < c) \ \leq \ P(X < b)$ et comme $b \in M(X)$, $P(X < b) \leq \dfrac{1}{2}$ donc :

$$P(X < c) \leq \frac{1}{2}.$$

De plus, on a :

$[X \leq a] \subset [X \leq c]$ donc :

$P(X \leq a) \leq P(X \leq c)$ et comme $a \in M(X), P(X \leq a) \ \geq \ \dfrac{1}{2}$ donc

$$\frac{1}{2} \leq P(X \leq c).$$

Ainsi :

$$P(X < c) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq c)$$

donc :

$$\boxed{c \in M(X)}$$

- On en déduit :

$\forall\ c \in [a, b]$, $c \in M(X)$ donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Si } \ M(X) \text{ contient deux réels } (a,b) \text{ tels que } a < b \\ \text{alors nécessairement, } \ M(X) \text{ contient l'intervalle } [a,b]\end{array}}$$

3.

Point méthodologique 3.

Il s'agit de montrer ici que :

$$m \in M(X) \Longleftrightarrow m + a \in M(X + a)$$

puis que :

$$m \in M(X) \Longleftrightarrow am \in M(aX)$$

On va procéder par équivalence directement. Attention, dans le second cas, il y aura des distinctions à faire en fonction du signe de a...

- On a :

$$m \in M(X) \Longleftrightarrow P(X < m) \ \leq \frac{1}{2} \ \leq P(X \leq m)$$

soit :

$$\iff P(X+a<m+a) \leq \frac{1}{2} \leq P(X+a \leq m+a)$$

d'où :

$$\iff m+a \in M(X+a)$$

donc :

$$\boxed{M(X+a) = \{m+a, \quad m \in M(X)\}}$$

- $\star$ Si $a=0$, alors aX est la variable aléatoire certaine égale à 0

  Ainsi :

$$\forall\, x<0, \quad P(aX \leq x) = 0 < \frac{1}{2}$$

  Donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_-^*, \quad x \notin M(aX).$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad P(aX \ \leq x) = 1$$

  donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \ P(aX<x) = 1 \ > \frac{1}{2}$$

  d'où :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \notin M(X)$$

  et

$$P(aX<0) \leq \frac{1}{2} \leq P(aX \leq 0)$$

  donc

$$M(aX) = \{0\} = \{0.m, \ m \in M(X)\}$$

$$= \{a.m, \ m \in M(X)\}$$

  $\star$ Si $a>0$, alors :

$$m \in M(X) \iff P(X<m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m)$$

  et comme $a>0$:

$$\iff P(aX<am) \leq \frac{1}{2} \leq P(aX \leq am)$$

$$\iff am \in M(aX).$$

Donc
$$M(aX) = \{am,\ m \in M(X)\}.$$

$\star$ Si $a < 0$, alors :
$$m \in M(X) \iff P(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m)$$
et comme $a < 0$:
$$\iff P(aX > am) \leq \frac{1}{2} \leq P(aX \geq am)$$
d'où :
$$m \in M(X) \iff 1 - P(aX \geq am) \leq \frac{1}{2} \leq 1 - P(aX > am)$$
soit
$$\iff P(aX < am) \leq \frac{1}{2} \leq P(aX \leq am)$$
$$\iff \quad am \in M(aX).$$

Ainsi :
$$M(aX) = \{am,\ m \in M(X)\}$$

et dans tous les cas :
$$\boxed{\{M(aX) = am, \quad m \in M(X)\}}$$

B. 1. a)

Point méthodologique 4.

Question assez délicate à formaliser. Pour comprendre ce qu'il se passe, comme souvent, on prend des exemples simples.

Par exemple, tentez de voir ce qu'il se passe pour une variable dont le support contient deux éléments a et b et tel que $F(a) = \frac{1}{2}$. On observe alors sans trop de difficultés que a et b sont dans $M(X)$. On utilise alors la question II.A.2 pour conclure que $M(X)$ contient le segment $[a, b]$. Il faudra alors montrer que tout élément qui n'est pas dans ce segment n'appartient pas à la médiane. Ca demande de la rigueur mais ce n'est pas trop difficile non plus.

Reste à formaliser le cas général. Et là, c'est un peu plus ardu ! Allons-y !

X est une variable alátoire discrète.

Posons $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, l'ensemble des valeurs prises par X avec une probabilité non nulle où I est un ensemble fini ou dénombrable constitué d'entiers consécutifs. Comme F prend la valeur $\frac{1}{2}$, on a :

$$\exists\ i_0 \in I, P(X \leq x_{i_0}) = \frac{1}{2}.$$

on a alors :

- $\forall\ x < x_{i_0}$,

  $$P(X \leq x) < P(X \leq x_{i_0})$$

  soit

  $$< \frac{1}{2}$$

  $$\forall\ x \in]-\infty, x_{i_0}[, \quad x \notin M(X).$$

- $\forall\ x > x_{i_0+1}$,

  $$P(X < x)\ \geq\ P(X \leq x_{i_0+1})$$

  d'où :

  $$> \frac{1}{2}$$

  donc :

  $$\forall\ x \in]x_{i_0+1}, +\infty[, \quad x \notin M(X).$$

- Enfin, on a :

  $$P(X < x_{i_0}) < \frac{1}{2} \ \text{ et }\ P(X \leq x_{i_0}) = \frac{1}{2}$$

  donc

  $$P(X < x_{i_0}) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq x_{i_0})$$

  Soit $x_{i_0} \in M(X)$.

  $$P(X < x_{i_0+1}) = \frac{1}{2} \ \text{ et }\ P(X \leq x_{i_0+1})\ >\ \frac{1}{2}$$

  donc

  $$P(X < x_{i_0+1})\ \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq x_{i_0+1})$$

  donc $x_{i_0+1} \in M(X)$.

  D'aprés la question II.A.2. , $[x_{i_0}, x_{i_0+1}] \subset M(X)$ d'où

$$\boxed{M(X) \text{ est un segment}}$$

b) Comme F ne prend pas la valeur $\frac{1}{2}$, on a :

$$\exists\ \alpha \in \mathbb{R}\ /\forall x < \alpha, \quad P(X \leq x)\ < \frac{1}{2} \quad \text{et } \forall x \geq \alpha, \quad P(X \leq x)\ > \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$\forall x < \alpha, \quad x \notin M(X).$$

De plus :

$$\forall x > \alpha, \quad P(X < x) > \frac{1}{2}$$

donc :

$$\forall x > \alpha, \quad x \notin M(X).$$

Enfin :

$$P(X < \alpha), \frac{1}{2} < P(X \leq \alpha)$$

d'où :

$$\alpha \in M(X)$$

donc :

$$\boxed{M(X) \text{ est réduit à un point}}$$

2. Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, en notant F sa fonction de répartition,

on a :

$$\begin{cases} \forall x < 0, \quad F(x) = 0 \\ \forall x \in [0, 1[, \quad F(x) = 1 - p \\ \forall x \in [1, +\infty[, \quad F(x) = 1 \end{cases}$$

- Si $p = \frac{1}{2}$, F prend la valeur $\frac{1}{2}$, et d'après le résultat de la question II.B.1.a)

(on a $n_{i_0} = 0$) :

$$\boxed{\text{Si } p = \frac{1}{2}, \quad M(X) = [0, 1]}$$

- Si $p < \frac{1}{2}$, F ne prend pas la valeur $\frac{1}{2}$ et

$P(X < x) = 0, \quad F(0) > \frac{1}{2}$ donc d'après la question II.B.1.b) $(\alpha = 1)$

$$\boxed{\text{Si } p < \frac{1}{2}, \quad M(X) = \{0\}}$$

- Si $p > \dfrac{1}{2}$, F ne prend pas la valeur $\dfrac{1}{2}$ et $P(X < 1) < \dfrac{1}{2}$, $\quad P(X \leq 1) = 1$

donc d'après la question II.B.1.b) $(\alpha = 1)$:

$$\boxed{\text{Si } p > \frac{1}{2}, \quad M(X) = \{1\}}$$

3. a) On a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X \leq k) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Soit en posant $j' = n - j$:

$$= \sum_{j=n-k}^{n} \binom{n}{n-j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et comme $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$:

$$= \sum_{j=n-k}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

soit :

$$= \sum_{j=n-k}^{n} P(X = j)$$

donc

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad P(X \leq k) = P(X \geq n - k)}$$

b) • Si n est pair, en posant $n = 2p$, d'après la question précédente, on a :

$$\forall\, k \in [\![0, 2p]\!], \quad P(X \leq k) = P(X \geq 2p - k)$$

soit :

$$= 1 - P(X < 2p - k)$$

et comme X est une variable aléatoire discrète :

$$= 1 - P(X \leq 2p - k - 1)$$

Pour $k = p$, On a alors :

$$P(X \leq p) + P(X \leq p - 1) = 1.$$

Comme $P(X \leq p-1) \ < \ P(X \leq p)$, on en déduit

$$\begin{cases} P(X \leq p) \ > \dfrac{1}{2} \\ \\ P(X \ \leq p-1) < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La fonction de répartition de X ne prend pas la valeur $\dfrac{1}{2}$, et d'après la question II.B.1.b) :

$$\boxed{M(X) = \{p\}}$$

- Si n est impair, en posant $n = 2p+1$, on a de même :

$$\forall \ k \in [\![0, 2p+1]\!], \quad P(X \leq k) + P(X \leq 2p - k) = 1$$

donc pour $k = p$:

$$2P(X \leq p) = 1$$

soit

$$P(X \leq p) = \frac{1}{2}$$

La fonction de répartition de X prend alors la valeur $\dfrac{1}{2}$ en p et d'après II.B.1.a) :

$$\boxed{M(X) = [0,1]}$$

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, donc $X + Y \rightsquigarrow B\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

   Or d'après la question II.B.2,
   $$M(X) = M(Y) = [0,1],$$
   et la question II.B.3.b),
   $$M(X+Y) = \{1\}.$$
   Ainsi :

$$\boxed{\text{Dans le cas général,} \quad M(X+Y) \neq \{m+n, \quad (m,n) \in M(X) \times M(Y)\}}$$

5. • Si $m \leq E(X)$, on a :

$$V(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} (k - E(X))^2 \ P(X = k)$$

soit :

$$= \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leq m}} (k - E(X))^2 \ P(X = k) + \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k > m}} (k - E(X))^2 \ P(X = k)$$

d'où :

$$\geq \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leq m}} (k - E(X))^2 \ P(X = k).$$

or :

$$\forall \ k \in X(\Omega \quad k \leq m, \quad k - E(X) \leq m - E(X) \leq 0$$

donc :

$$\forall \ k \in X(\Omega), \quad k \leq m, \quad (k - E(X))^2 \geq (m - E(X))^2$$

d'où :

$$V(X) \geq (m - E(X))^2 \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \leq m}} P(X = k)$$

soit :

$$\geq (m - E(X))^2 P(X \leq m)$$

et comme $m \in M(X)$:

$$\geq \frac{1}{2}(m - E(X))^2$$

d'où

$$2V(X) \geq (m - E(X))^2$$

et comme $y \mapsto \sqrt{y}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

$$\sqrt{2}\sigma(X) \ \geq \ |m - E(X)|.$$

- De même, si $m \geq E(X)$, on a :

$$V(X) \geq \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq m}} (k - E(X))^2 \; P(X = k)$$

d'où :

$$\geq (m - E(X))^2 P(X \geq m)$$

donc :

$$\geq (m - E(X))^2 (1 - P(X < m))$$

comme $m \in M(X)$, on a :

$$P(X < m) \;\leq\; \frac{1}{2}$$

donc :

$$1 - P(X < m) \;\geq\; \frac{1}{2}$$

d'où :

$$V(X) \geq \frac{1}{2}(m - E(X))^2.$$

Ainsi dans tous les cas :

$$\boxed{\forall m \in M(X), \quad |m - E(X)| \;\leq\; \sqrt{2}\sigma(X)}$$

C. 1. a) Soit X une variable aléatoire à densité et F sa fonction de répartition.

Comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X < x) = P(X \leq x),$$

on a :

$$M(X) = \{m \in \mathbb{R}, \quad F(m) = \frac{1}{2}\}.$$

On a : $F(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, F continue sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists\, m \in \mathbb{R} \;/\; F(m) = \frac{1}{2}$$

donc :

$$\boxed{M(X) \neq \emptyset}$$

b) Soit F la fonction de répartition de X.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0.$$

d'où :

F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc F réalise une bijection de $\mathbb{R}$

sur $]0, 1[$

d'où :

$$\exists !\ \alpha \in \mathbb{R}\ /\ F(\alpha) = \frac{1}{2}$$

et comme

$$F(0) = \frac{1}{2}$$

et

$$M(X) = \{m \in \mathbb{R}\ /\ F(m) = \frac{1}{2}\}$$

$$\boxed{M(X) = \{0\}}$$

c) La fonction de répartition F de X est :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad F(x) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \end{cases}$$

Ainsi :

$$m \in M(X) \Longleftrightarrow F(m) = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 1 - e^{-m\lambda} = \frac{1}{2}$$

et $m \in \mathbb{R}^+$ donc :

$$\iff m = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

d'où :

$$\boxed{M(X) = \left\{ \frac{\ln 2}{\lambda} \right\}}$$

2. a) Comme f est continue sur $]a, b[$, F_1 est de classe C^1 sur $]a, b[$ et :

$$\forall\ x \in]a, b[, \quad F_1'(x) = f(x) > 0.$$

F_1 est donc strictement croissante sur $]a, b[$.

Comme elle y est continue, elle réalise une bijection de $]a, b[$ sur $\left] \lim\limits_{x \to a^+} F(x),\ \lim\limits_{x \to b_-} F(x) \right[$.

- Si $a \neq -\infty$ et $b \neq +\infty$,

  comme f est nulle en dehors de $[a, b]$:

$$\forall\ x < a, \quad F(x) = 0$$

  d'où :

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = 0$$

et comme F est continue sur $\mathbb{R}$:

$$F(a) = 0$$

d'où

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = 0.$$

$$\forall\ x > b, \quad F(x) = 1$$

d'où

$$\lim_{x \to b^+} F(x) = 1$$

et comme F est continue sur $\mathbb{R}$:

$$F(b) = 1$$

d'où :

$$\lim_{x\to b^-} F_1(x) = 1$$

- Si $a = -\infty$,

$$\lim_{x\to a} F_1(x) = \lim_{x\to a} F(x)$$

et comme F est la fonction de répartition de X :

$$= 0$$

- De même, si $b = +\infty$,

$$\lim_{x\to b} F_1(x) = \lim_{x\to b} F(x) = 1$$

Ainsi :

$$\boxed{F_1 \text{ établit une bijection de }]a,b[\text{ sur }]0,1[}$$

b) - Comme $\dfrac{1}{2} \in]0,1[$ et d'après la question précédente :

$$\boxed{\exists!\ m_0 \in]a,b[\ /\ F(m_0) = \frac{1}{2}}$$

- $\forall x \leq a, \quad F(x) = 0$

  et :

$$\forall\ x \geq b, \quad F(x) = 1$$

  donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash]a,b[, \quad x \notin M(X)$$

  d'où

$$M(X) \subset]a,b[$$

  et d'après le résultat précédent :

$$\boxed{M(X) = \{m_0\}}$$

c) F_1 est continue et croissante (car F est croissante) et $F_1(]a,b[) =]a,b[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists\ m_0 \in]a,b[, \quad F(m_0) = \frac{1}{2}$$

donc

$$M(X) \subset]a,b[.$$

$$\boxed{M(X) \subset]a,b[\text{ mais } M(X) \text{ n'est pas nécessairement réduit à un point}}$$

3. Soit $m \in M(X)$

- Si $m \leq E(X)$, on a :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 \ f(t) \ dt$$

et comme

$$(t - E(X))^2 \ f(t) \geq \ 0$$

$$V(X) \geq \int_{-\infty}^{m} (t - E(X))^2 \ f(t) \ dt$$

or

$$t - E(X) \ \leq \ m - E(X) \leq 0$$

donc

$$(t - E(X))^2 \geq (m - E(X))^2$$

$$V(X) \geq (m - E(X))^2 \int_{-\infty}^{m} f(t) \ dt$$

soit :

$$\geq (m - E(X))^2 F(m)$$

et comme $m \in M(X)$:

$$\geq \frac{1}{2}(m - E(X))^2.$$

- Si $m \geq E(X)$, on a de même :

$$V(X) \geq \int_{m}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) \ dt$$

soit :

$$\geq (m - E(X))^2 \int_{m}^{+\infty} f(t) \ dt$$

et donc :

$$\geq (m - E(X))^2 (1 - F(m))$$

et comme $F(m) = \dfrac{1}{2}$:

$$\geq \frac{1}{2}(m - E(X))^2.$$

Dans tous les cas, on a donc :

$$2V(X) \geq (m - E(X))^2$$

et comme $y \mapsto \sqrt{y}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\boxed{\forall\ m \in M(X), \quad \sigma(X)\sqrt{2}\ \geq\ |m - E(X)|}$$

Ainsi, dans tous les cas :

$$2V(X) \leq (m - E(X))^2$$

Donc :

$$\boxed{\forall m \in M(X), \sqrt{2}\sigma(X)\ \leq\ |m - E(X)|}$$

Partie III

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$g : t \mapsto e^{-t}$ étant C^{n+1} sur $[0, x]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

on a, d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(0-x)^k}{k!} g^{(k)}(x) + \int_x^0 \frac{(0-u)^n}{n!} g^{(n+1)}(u)\ d(u)$$

or :

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}, \quad g^{(k)}(t) = (-1)^k e^{-t}$$

D'où :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}(-1)^k e^{-x} + \int_x^0 \frac{(-1)^n u^n}{n!}(-1)^{n+1}\ e^{-u}\ du$$

$$= e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^x u^n e^{-u}\ du$$

Et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^x e^{-u} u^n\ du = n!(1 - P_n(x))}$$

b) Ainsi, pour $x = n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - P_n(n) = \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-u} u^n \, du$$

En posant $u = nt$ $(du = n\ dt)$, C^1 sur $[0,1]$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - P_n(n) = \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-nt} (nt)^n \ ndt$$

$$= \frac{1}{u!} \ n^{n+1} \int_0^1 t^n e^{-nt} \ dt$$

En posant $t = 1 - v (dt = -dv)$, C^1 sur $[0,1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - P_n(n) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-v)^n e^{-n+nv} \ dv$$

$$= \frac{e^{-n} \ n^{n+1}}{n!} \int_0^1 [(1-v)e^v]^n \, dv$$

et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - P_n(n) = \frac{e^{-n} \ n^{n+1}}{n!} I_n}$$

c)

```
n=input('entrer un entier n')
U=1
S=0
For k=0 : n
  S=S+U;
  U=U*n/(k+1) ;
  end
S=S/exp(n);
disp(S)
```

2. D'après I.4.b) :

$$I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Donc, d'après 1.b) :

$$1 - P_n(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-n} \ u^{n+1}}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

d'où :

$$\boxed{1 - P_n(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n!}{n!} \ e^{-n} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}}$$

3. a) Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \hookrightarrow P(n)$$

⋆ Pour $n = 1 \quad S_n = X_1$ donc :

$$S_1 \hookrightarrow P(1)$$

⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que :

$$S_n \hookrightarrow P(n).$$

On a :

$$S_{n+1} = S_u + X_{n+1}$$

Comme $X_1, X_2, ...X_{n+1}$ sont indépendantes

$S_u = X_1 + X_2 + ... + X_n$ sont indépendante de X_{n+1},

et comme

$$S_u \hookrightarrow P(n) \text{ et } X_{n+1} \hookrightarrow P(1) :$$

$$S_{n+1} \hookrightarrow P(n+1).$$

⋆ Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \hookrightarrow P(n)}$$

b) D'où ; comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(X_n) = \sigma(X_n) = 1$$

d'après le théorème de la limite centrée :

$$\lim_{u \to +\infty} P(\varphi_u \leq 0) = \phi(0)$$

où ϕ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \frac{1}{2}$$

soit :

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}$$

Or, comme $S_n \hookrightarrow P(n)$:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(S_n \leq n) &= \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\,\frac{n^k}{k!}\\ &= P_n(n).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n(n) = \frac{1}{2}}$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - P_n(n) = \frac{1}{2}$$

Et d'après 2 :

$$\frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n}{n!}\, e^{-n}\sqrt{\frac{\pi n}{2}}$$

D'où :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

4. a) On a :

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) &= -e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + e^{-x}\sum_{k=1}^{n} k\,\frac{x^{k-1}}{k!}\\ &= -P_n(x) + e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\end{aligned}$$

D'où, en posant $k' = k - 1$:

$$\boxed{\forall\, n \geq 2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) + P_n'(x) = P_{n-1}(x)}$$

b) On a, d'après la question précédente avec $u+1$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1}(n+1) - P_n(n) = P_{n+1}(n+1) - P_{n+1}(n) - P'_{n+1}(n)$$

Et donc (formule de Taylor avec reste intégral appliquée à P_{n+1} sur $[n, n+1]$,

où P_{n+1} est C^2) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1}(n+1) - P_n(n) = \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^1}{1!}\, P''_{n+1}(t)\, dt$$

d'après 4.a) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, t \in [n, n+1], \quad P'_{n+1}(t) = P_n(t) - P_{n+1}(t)$$

Et par dérivation :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, t \in [n, n+1], P''_{n+1}(t) &= P'_n(t) - P'_{n+1}(t) \\
&= P_{n-1}(t) - P_n(t) - (P_n(t) - P_{n+1}(t)) \\
&= -e^{-t}\, \frac{t^n}{n!} + e^{-t}\, \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{e^{-t}\, t^n}{n!} \left[-1 + \frac{t}{n+1} \right] \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Ainsi : (avec égalité pour $t = n+1$)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^1}{1!}\, P''_{n+1}(t)\, dt < \ 0$$

Et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1}(n+1) - P_n(n) \ < \ 0$$

Ainsi :

$$\boxed{(P_n(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement décroissante}}$$

De même, d'après 4.a) :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \geq 2, \quad P_n(n+1) - P_{n-1}(n) &= P_n(n+1) - P_n(n) - P'_n(n) \\
&= \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^1}{1}\, P''_n(t)\, dt
\end{aligned}$$

De plus, d'après les calculs précédents :

$$\forall\ t \in [n, n+1], \quad P_n''(t) = \frac{e^{-t}\ t^{n-1}}{(n-1)!}\ \left[-1 + \frac{t}{n}\right]$$

$$\geq 0 \ \ \text{(avec egalité pour } t = n\text{)}$$

D'où :

$$\forall\ n \geq 2, \quad P_n(n+1) - P_{n-1}(n) \ > \ 0$$

Ainsi :

$$\boxed{(P_{n-1}(n))_{n\geq 2} \ \text{ est strictement croissante}}$$

c) On a :

$$\forall\ n \geq 2, \quad P_n(n) - P_{n-1}(n) = e^{-n}\ \frac{n^n}{n!}$$

Et d'après 3.b) :

$$P_n(n) - P_{n-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi\ n}}$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} (P_n(n) - P_{n-1}(n)) = 0$$

Ainsi, d'après 4.b) :

$$\boxed{(P_n(n))_{n\geq 2} \text{ et } (P_{n-1}(n))_{n\geq 2} \text{ sont adjacentes}}$$

d) D'après 3.b) :

$$\lim_{n\to+\infty} \ P_n(n) = \lim_{n\to+\infty} P_{n-1}(n) = \frac{1}{2}$$

Et donc, d'après 4.b) :

$$\forall\ n \geq 2, \quad P_{n-1}(n) < \frac{1}{2} < P_n(n).$$

Soit encore, en notant F la fonction de répartition de X, si $n \leq 2$:

$$F(n-1) \ < \ \frac{1}{2} \ < \ F(n).$$

Et donc, d'après II.2.b) :

$$M(X) = \{n\}$$

Si $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} F(0) &= P(X \leq 0) \\ &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \\ &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$F(1) = \frac{2}{e} \; > \; \frac{1}{2},$$

donc :

$$M(X) = \{1\}$$

Ainsi :

$$\boxed{M(X) = \{n\}}$$