BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : emlyon **business school**

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 27 avril 2020, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME 1

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

PARTIE A : Étude de la suite des racines des polynômes P_n

1. **a.** Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, les limites de P_n en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme P_n admet au moins une racine réelle.

2. **a.** Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines de P_n sont toutes simples.

3. **a.** Vérifier : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\left(1 - \frac{x}{2k+1}\right).$

b. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, les racines réelles de P_n appartiennent nécessairement à l'intervalle $[1\,;2n+1]$.

4. **a.** Montrer les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} P_{n+1}'(x) = -P_n(x) - \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ P_{n+1}''(x) = P_n(x). \end{cases}$$

b. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, la fonction P_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'une seule fois, en un réel noté u_n.

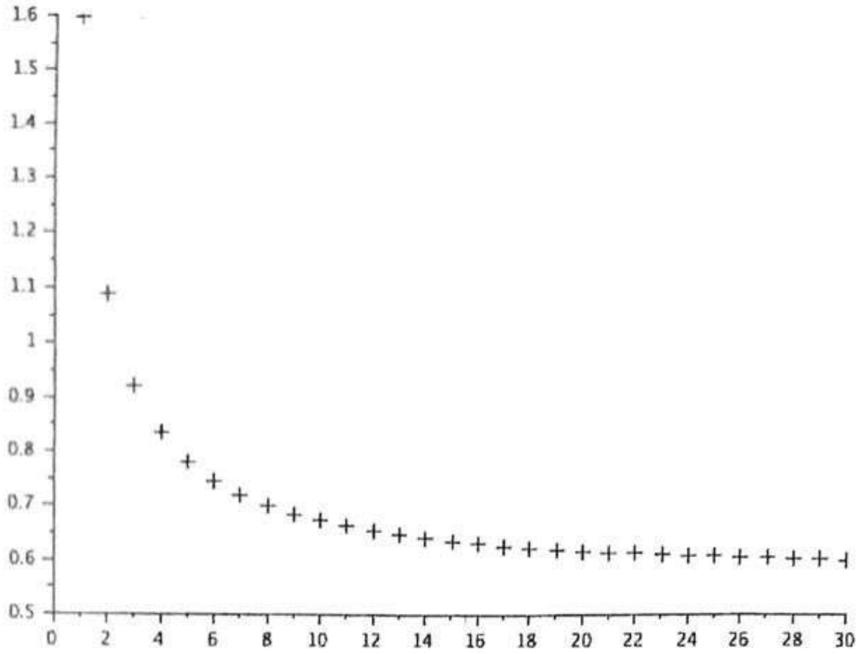
5. **a.** Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function y = P(n,x)` qui prend pour arguments un entier n de $\mathbb{N}$ et un réel x, et qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.

On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `factorial(k)` *renvoie une valeur de* k!.

b. Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant pour argument un entier n de $\mathbb{N}$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = suite(n)
    a = .........
    b = .........
    c = (a+b)/2
    while .........
        if ......... then
            a = c
        else
            b = c
        end
        c = .........
    end
    .........
endfunction
```

c. On utilise la fonction précédente pour représenter les premiers termes de la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Conjecturer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ et la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



6. a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(u_n) = \dfrac{u_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 - \dfrac{u_n}{2n+3}\right).$

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

7. On suppose **dans cette question** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

a. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |P_n(u_n) - P_n(\ell)| \leqslant \mathrm{e}^{\ell}\,|u_n - \ell|.$

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell)$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(u_n) = \mathrm{e}^{-\ell}$.

c. Aboutir à une contradiction.

8. En déduire la nature et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PARTIE B : Quelques résultats intermédiaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes entre elles et indépendantes de la partie A.

9. On note f la fonction définie sur $]0\,;1]$ par : $\forall t \in]0\,;1], \quad f(t) = -\ln(t)$.

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ converge et préciser sa valeur.

Tournez la page S.V.P.

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Justifier, pour tout k de $[\![1\,;n-1]\!]$: $\quad \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right).$

En déduire : $\quad \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(n)}{n}.$

c. En déduire la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. Montrer finalement : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n\,!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1}.$

10. On note g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\quad \forall t \in]0\,;+\infty[,\ \ g(t) = t + \ln(t) + 1.$

Montrer qu'il existe un unique α appartenant à $]0\,;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et justifier :

$$\mathrm{e}^{-2} < \alpha < \mathrm{e}^{-1}.$$

PARTIE C : Équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11. a. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

b. Justifier : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

c. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad P_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant P_n(x) + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

12. Soit n un entier de $\mathbb{N}$.

a. Montrer : $\quad P_{n+1}(u_n) \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

b. En utilisant le résultat des questions **3.b** et **6.a**, obtenir : $\quad \dfrac{2\,(u_n)^{2n}}{(2n+3)!} \leqslant \mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{(u_n)^{2n}}{(2n)!},$

puis :

$$(2n)! \leqslant (u_n)^{2n}\,\mathrm{e}^{u_n} \leqslant \frac{(2n+3)!}{2}.$$

13. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad w_n = \dfrac{u_n}{2n}.$

a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n} \leqslant w_n\,\mathrm{e}^{w_n} \leqslant \left(\frac{(2n+3)^3}{2}\right)^{\frac{1}{2n}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2n}}}{2n}.$$

b. En déduire que la suite $\big(g(w_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puis que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers α, la fonction g et le réel α étant définis dans la question **10.**.

14. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE A : Étude d'un produit scalaire

1. Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Pour tout k de $\mathbb{N}$, déterminer à l'aide d'une intégration par parties une relation entre les intégrales I_{k+1} et I_k.

b. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N},\quad I_k = k!$

Pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}[X]^2$, on pose : $\quad \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

3. Montrer que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathbb{R}[X]$ de ce produit scalaire et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

4. Calculer, pour tout (i, j) de $\mathbb{N}^2$, $\langle X^i, X^j\rangle$ et, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\|X^i\|$.

On admet qu'il existe une unique suite de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

- pour tout k de $\mathbb{N}$, le polynôme Q_k est de degré k et de coefficient dominant strictement positif,
- pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $(Q_0, \ldots, Q_k)$ est une famille orthonormale.

5. a. Déterminer Q_0 et Q_1 et vérifier que $Q_2 = \dfrac{1}{2}X^2 - 2X + 1$.

b. Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la famille $\mathcal{C}_k = (Q_0, \ldots, Q_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

On définit la matrice $H_n = (h_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2,\quad h_{i,j} = \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle.$$

On note également A_n la matrice de la famille $\mathcal{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ dans la base $\mathcal{C}_n$.

6. Étude du cas $n = 2$:

a. Expliciter la matrice H_2.

Montrer que la matrice H_2 est inversible et vérifier que $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

b. Expliciter la matrice A_2 et calculer ${}^t A_2\, A_2$. Que remarque-t-on ?

7. On note, pour tout (i,j) de $[\![1\,;n+1]\!]^2$, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice A_n.

a. Justifier que la matrice A_n est inversible.

b. Justifier : $\quad \forall j \in [\![1\,;n+1]\!],\quad X^{j-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,j}\, Q_{k-1}.$

En déduire : $\quad \forall (i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2,\quad \langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{k,i}\, a_{k,j}.$

c. Montrer alors la relation : $H_n = {}^tA_n\, A_n$.

8. **a.** Montrer que la matrice H_n est inversible.

b. Établir (sans calcul) que la matrice H_n est diagonalisable.

c. Montrer que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.
(On pourra calculer, pour tout vecteur propre Y de H_n, ${}^tY\, H_n\, Y$.)

PARTIE B : Étude d'une projection

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On définit la matrice colonne $U = \begin{pmatrix} \langle P, 1\rangle \\ \langle P, X\rangle \\ \vdots \\ \langle P, X^n\rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

9. Soit R un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note $V = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coordonnées de R dans la base $\mathcal{B}_n$.

a. Montrer, pour tout i de $[\![0\,;n]\!]$: $\langle R, X^i\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle X^i, X^k\rangle$.

b. Montrer : R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$ $\iff$ $\forall i \in [\![0\,;n]\!],\ \langle P, X^i\rangle = \langle R, X^i\rangle$.

En déduire : R est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$ $\iff$ $V = H_n^{-1}\, U$.

10. **Retour au cas $n = 2$:** Déterminer le projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

11. On souhaite retrouver le résultat précédent par une méthode différente.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\quad f(a,b,c) = \int_0^{+\infty} (a + bt + ct^2 - t^3)^2\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

a. Vérifier :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\quad f(a,b,c) = a^2 + 2b^2 + 24c^2 + 2ab + 4ac + 12bc - 12a - 48b - 240c + 720.$$

b. Montrer que f admet un unique point critique (a_0, b_0, c_0) vérifiant : $H_2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 120 \end{pmatrix}$.

c. Montrer que la matrice hessienne de f au point (a_0, b_0, c_0) est la matrice $2\,H_2$.

d. En déduire que la fonction f admet au point (a_0, b_0, c_0) un minimum local.

e. Justifier : $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} f(a,b,c) = \inf_{R\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - R\|^2$.

En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$ et que ce minimum est atteint en un unique point.

f. Retrouver alors l'expression du projeté orthogonal du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

• FIN •