MYPREPA

EXPERT EN REUSSITE ACADEMIQUE

FONCTIONS DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}$

Sommaire

Les questions classiques

1. Ensemble de définition

a. Comment montrer qu'une fonction f est bien définie sur son ensemble de définition D_f ?

Méthode 1. *En montrant que pour tout x de D_f, $f(x)$ existe.*

Point méthodologique 1.

Dans ce cas, l'ensemble de définition de f nous est donné. Il faut alors vérifier que $f(x)$ existe pour tout x de D_f

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1,3\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{x^2-4x+3}$

Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1,3\}$

■ **Correction**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - 4x + 3 \neq 0\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,3\}, \quad x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$$

or

$$\begin{aligned}(x-2)^2 - 1 = 0 \iff x-2 &= 1 \text{ ou } x-2 = -1 \\ \iff x &= 3 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,3\}, \quad x^2 - 4x + 3 \neq 0$$

Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1,3\}$

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-1[\cup[3;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$

Montrer que f est bien définie sur $]-\infty;-1[\cup[3;+\infty[$

■ **Correction**

$$D_f : \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x+1 \neq 0 \ \text{ et } \ \frac{x-3}{x+1} \geq 0\right\}$$

(i) $\forall x \in]-\infty;-1[\cup[3;+\infty[,\quad (x+1) \neq 0$

(ii) $\forall x < -1,$

$$\begin{cases} x-3<0 \\ x+1<0 \end{cases}$$

donc

$$\forall x < -1,\ \ \frac{x-3}{x+1} \geq 0$$

$\forall x \geq 3,$

$$\begin{cases} x-3\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases}$$

donc

$$\forall x \geq 3,\ \ \frac{x-3}{x+1} \geq 0$$

Ainsi, $\forall x \in]-\infty;-1[\cup[3;+\infty[,\ \ \dfrac{x-3}{x+1} \geq 0$

D'après (i) et (ii), f est bien définie sur $]-\infty;-1[\ \cup\ [3;+\infty[$

b. Comment déterminer l'ensemble de définition D_f d'une fonction ?

Méthode 2. *En revenant à la caractérisation sur l'existence d'une fonction*

Point méthodologique 2.

Dans ce cas, l'ensemble de définition de f ne nous est pas donné.

Il s'agit alors de trouver l'ensemble des points x tels que $f(x)$ existe.

Cela nous amène généralement à résoudre une ou plusieurs équations ou inéquations

Exemple 1 :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par pour tout x réel,

$$f(x) = \sqrt{\ln x}$$

■ **Correction**

$\underline{D_f}$: f est définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln x \geq 0$ i.e si et seulement si $x \geq 1$

Donc

$$\boxed{D_f = [1; +\infty[}$$

Exemple 2 :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par pour tout x réel,

$$f(x) = x\, e^{\frac{1}{\ln x}}$$

■ **Correction**

$$\begin{cases} x \mapsto \ln x \quad \text{définie sur } \mathbb{R}_+^* \\ \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \quad \text{définie sur } \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Donc $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ est définie si et seulement si

$$\begin{cases} x > 0 \\ \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$$

i.e si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 1$

Ainsi

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}}$$

Exemple 3 :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par pour tout x réel,

$$f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2+1})$$

■ **Correction**

f est définie si et seulement si

$$\begin{cases} 4x^2 + 1 \geq 0 \\ \\ 2x + \sqrt{4x^2+1} > 0 \end{cases}$$

- un carré est toujours positif donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 4x^2 + 1 \geq 0$
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

  On a :

$$2x + \sqrt{4x^2+1} > 0 \iff \sqrt{4x^2+1} > -2x$$

  - Si $x > 0$ alors $-2x < 0$ et comme $\sqrt{4x^2+1} \geq 0$

    (une racine carré étant toujours positive)

    l'inégalité est toujours vraie sur $\mathbb{R}_+^*$

  - Si $x \leq 0$ alors $-2x \geq 0$, on peut alors élever au carré par croissance de $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et il vient :

$$\sqrt{4x^2+1} > -2x \iff 4x^2 + 1 > 4x^2 \iff 1 > 0$$

    Ceci est toujours vrai donc on peut conclure :

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$$

2. Symétrie d'une fonction

a. Comment étudier la partie d'une fonction f sur un intervalle I centre ?

Méthode 3. *En revenant à la définition d'une fonction paire ou impaire*

Rappel de cours 1.

1. f est paire sur un intervalle I si et seulement I est un intervalle centré en 0 et pour tout x appartenant à I, $f(-x) = f(x)$.
2. f est impaire sur un intervalle I si et seulement I est un intervalle centré et pour tout x appartenant à I, $f(-x) = -f(x)$

Point méthodologique 3.

Pour montrer qu'une fonction f est paire ou impaire sur un intervalle I, le premier réflexe doit être de vérifier que I est un intervalle centré en 0 c'est-à-dire que pour tout appartenant à I, $-x$ appartient à I.

Si cette condition n'est pas vérifiée, la fonction f ne peut être paire ou impaire sur I.

Ensuite, et seulement ensuite, on essaye de montrer que pour tout x appartenant à I, $f(-x)$ est égal à $f(x)$ ou $-f(x)$ selon que l'on souhaite montrer que f est paire ou impaire.

En pratique, l'intervalle I coïncidera avec l'ensemble de définition D_f de f.

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Etudier la parité de f.

■ **Correction**

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \in \mathbb{R} \quad (1)$

- $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}(1+e^{-x}))^2} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(1+e^{x})^2}$$

$$= \frac{e^{-x}\ e^{2x}}{(1+e^{x})^2} = \frac{e^{x}}{(1+e^{x})^2} = f(x) \quad (2)$$

$(1)(2) \implies f$ est paire sur $\mathbb{R}$

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R} - \{-2;2\}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x$$

Étudier la parité de f

■ **Correction**

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \in \mathbb{R} \qquad (1)$

- $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2;2\}, \quad f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) - (x^3 - 2x) = -f(x) \qquad (2)$

$(1)(2) \implies f$ est impaire sur $\mathbb{R} - \{-2;2\}$

Exemple 3 :

Soit f la fonction définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R} - \{2\}$ par $\quad f(x) = \dfrac{1}{2-x}$

Étudier la parité de f.

■ **Correction**

$\mathbb{R} - \{2\}$ n'est pas un intervalle centré en 0 :

en effet, $-2 \in \mathbb{R} - \{2\}$ ce qui n'est pas le cas de $-(-2) = 2$

Ainsi, f n'est ni paire ni impaire. ■

b. Comment étudier la périodicité d'une fonction f sur un intervalle I centré ?

Méthode 4. *En revenant à la définition d'une fonction périodique*

Rappel de cours 2.

Une fonction f définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ de nombres réels est dite périodique de période $t \in \mathbb{R}$ (ou $t-$périodique) si

$$\forall x \in D,\ x + t \in D \quad \text{et} \quad f(x+t) = f(x)$$

Point méthodologique 4.

Pour montrer qu'une fonction f est $t-$périodique ($t \in \mathbb{R}$) sur un ensemble D, le premier réflexe doit être de vérifier que $\forall x \in D, \quad x + t \in D$.

Si cette condition n'est pas vérifiée, la fonction f ne peut $t-$périodique sur l'ensemble D.

Ensuite, et seulement ensuite, on essaye de montre que pour tout

$$x \in D, \quad f(x+t) = f(x)$$

Exemple 1 : (Extrait d'ESSEC 2016 S)

On notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs.

Pour tout x dans l'ensemble D, on note $\cot(x) = \pi \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$

■ **Correction**

- $\forall x \in D, \quad (x+1) \in D$

- $\forall x \in D$,

$$\cot(x+1) = \pi \, \frac{\cos(\pi(x+1))}{\sin(\pi(x+1))}$$

$$= \pi \, \frac{\cos(\pi x+\pi)}{\sin(\pi x+\pi)}$$

or

$$\forall u \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(\pi+u) & = & -\cos(u) \\ \sin(\pi+u) & = & -\sin(u) \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in D, \quad cot(x+1) = \pi \, \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

Exemple 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant 2 et 3 comme période.

Démontrer que f est 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

■ **Correction**

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+t \in \mathbb{R} \qquad (1)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = f(x+3-2) = f((x+3)-2) = f(x+3) = f(x) \qquad (2)$

  $(1)(2) \Rightarrow \ f$ est 1-périodique sur $\mathbb{R}$

c. Comment montrer que la courbe d'une fonction admet une droite $x = a$ (a réel) comme axe de symétrie ?

Méthode 5. *En revenant à la définition de la symétrie par rapport à une droite*

Rappel de cours 3.

Si la fonction f vérifie : pour tout x de D_f tel que $a-x$ et $a+x \in D_f$,

$f(a-x) = f(a+x)$, alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie

de la courbe représentative de f

Point méthodologique 5.

Pour montrer qu'une fonction f est symétrique par rapport à la droite

d'équation $x = a(a \in \mathbb{R})$, le premier réflexe doit être de déterminer les réels x

tels que $a-x$ et $a-x \in D_f$: ce point est très important au niveau de la rigueur.

Ensuite, on essaye de montrer que pour tout x de D_f tel que

$$a - x_a + x \in D_f, \quad f(a-x) = f(a+x)$$

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie pour tout x appartenant à R par $f(x) = \cos^4 x - 2\cos^2 x$

Montrer que la courbe représentative de f admet pour centre de symétrie la droite $\Delta\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right)$

■ **Correction**

Pour tout $h \in \mathbb{R}$, $x-h$ et $x+h$ appartiennent à $\mathbb{R}$

Pour tout h, on calcul séparément :

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = \cos^4\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$$

$$= (-\sin(h))^4 - 2(-\sin(h))^2 = \sin^4(h) - 2\sin^2(h)$$

et

$$f\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \cos^4\left(\frac{\pi}{2}-h\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-h\right)$$

$$= \sin^4(h) - 2\sin^2(h)$$

Puisque $f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)$, on en déduit que la droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de C_f ■

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]-\infty;1] \cup [3;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$

Montrer que la courbe représentative de f admet pour centre de symétrie la droite $\Delta(x=2)$

■ **Correction**

$$\begin{cases} 2+h \in D_f \\ 2-h \in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} 2+h \leq 1 \\ 2+h \geq 3 \\ 2-h \leq 1 \\ 2-h \geq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} h \leq -1 \\ h \geq 1 \\ h \geq 1 \\ h \leq -1 \end{cases} \iff h \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$$

Pour tout $h \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$,

d'une part

$$f(2+h) = \sqrt{(2+h)^2-4(2+h)+3} \qquad = \sqrt{4+4h+h^2-8-4h+3} = \sqrt{h^2-1}$$

et d'autre part

$$f(2-h) = \sqrt{(2-h)^2-4(2-h)+3} \qquad = \sqrt{4-4h+h^2-8+4h+3} = \sqrt{h^2-1}$$

Puisque $f(2+h) = f(2-h)$, on conclut que la courbe C_f admet la droite Δ d'équation $x = 2$ pour axe de symétrie ■

d. Comment montrer que la courbe d'une fonction admet un point $O(a,b)$ comme centre de symétrie ?

Méthode 6. *En revenant à la définition de la symétrie par rapport à un point*

Rappel de cours 4.

Si la fonction f vérifie : pour tout x de D_f tel que

$$a-x \quad \text{et} \quad a+x \in D_f, \quad f(a-x)+f(a+x)=2b$$

alors le point de coordonnées $(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f

Point méthodologique 6.

Pour montrer qu'une fonction f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(a;b)$ (a et b appartenant à $\mathbb{R}$), le premier réflexe doit être de déterminer les réels x tels que $a-x$ et $a+x \in D_f$: ce point est très important au niveau de la rigueur.

Ensuite, on essaye de montrer que pour tout x de D_f tel que

$$a-x \quad \text{et} \quad a+x \in D_f, \quad f(a-x)+f(a+x)=2b$$

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;+\infty[$ par $f(x)=2x-3-\dfrac{3}{x+2}$

Montrer que la courbe représentative de f admet pour centre de symétrie le point $\Omega(-2;-7)$

■ **Correction**

$$-2+h=-2 \quad \text{et} \quad -2-h=-2 \iff h=0$$

Pour tout $h \neq 0$, on calcule

$$\frac{f(-2+h)+f(-2-h)}{2}=\frac{2(-2+h)-3-\dfrac{3}{-2+h+2}+2(-2-h)-3-\dfrac{3}{-2-h+2}}{2}$$

$$=\frac{-4+2h-3-\dfrac{3}{h}-4-2h-3-\dfrac{3}{-h}}{2}=-\frac{14}{2}=-7$$

Ainsi $\dfrac{f(x_\Omega+h)+f(x_\Omega-h)}{2}=y_\Omega$, ce qui prouve que le point $\Omega(-2;-7)$ est centre de symétrie de la courbe C_f ■

<u>Exemple 2</u> : (Extrait d'ESSEC 2003 S1)

On considère la fonction f_0 définie de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0(0)=f_0(1)=0$ et pour $0<x<1$ par :

$$f_0(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$$

Montrer que la courbe représentative de f_0 admet pour centre de symétrie le point $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

■ **Correction** Montrons que $\forall x\in[0;1],\ \ 1-x\in[0;1]$ et $f_0(1-x)=-f_0(x)$

Soit $x\in[0;1]$.

<u>1^{er} **cas**</u> **:** $x\in]0;1[$.

Alors $1-x\in]0;1[$ et

$$f_0(1-x)=\left(1-x-\frac{1}{2}\right)\ e^{\frac{1}{(1-x)(1-x-1)}}$$

$$f_0(1-x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)\ e^{\frac{1}{x(x-1)}}=-f_0(x)$$

<u>2^{eme} **cas**</u> **:** $x=0$.

$$1-x=1\in[0;1]\ \text{ et }\ f_0(1-x)=f_0(1)=0=-0=-f_0(0)=-f_0(x)$$

<u>3^{eme} **cas**</u> **:** $x = 1$.

$$1 - x = 0 \in [0;1] \quad \text{et} \quad f_0(1-x) = f_0(0) = 0 = -0 = -f_0(1) = -f_0(x)$$

$$\forall x \in [0;1], \quad 1 - x \in [0;1] \quad \text{et} \quad f_0\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - x\right) = f_0(1-x) = -f_0(x) = 2 \times 0 - f_0(x)$$

La courbe représentative de f_0 admet pour centre de symétrie le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ ■

3. Limite

a. Comment montrer qu'une fonction f admet une limite L ($L \in \mathbb{R}$, ou $= \pm\infty$) en un point x_0 et la calculer ?

■ **Remarque :**

Pour montrer qu'une fonction admet une limite L en un point x_0 et la calculer, il faut toujours chercher à la calculer, ce qui permet d'en montrer l'existence.

On ne demandera quasiment jamais de ne montrer que l'existence de cette limite.

Cependant, si tel est le cas, pour montrer l'existence d'une limite en un point, sans passer par le calcul, il faut le plus souvent appliquer le théorème de la limite monotone (Toute fonction monotone sur $]a;b[$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a;b[$)

Si une question demande de montrer l'existence de la limite et de la calculer (ce qui représente 99% des cas), il faut donc se lancer dans une des méthodes de calcul ci-dessous directement. ■

Méthode 7. *Par calcul direct*

Point méthodologique 7.

On peut parfois calculer la limite directement en utilisant les propriétés sur les limites de base. On peut notamment utiliser les croissances comparées.

Rappel de cours 5.

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Et pour a et b réels strictement positifs :

$$\lim_{x \to 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0$$

Exemple 1 :

Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x\ln(x)$

■ **Correction**

Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x\ln(x) = 0$

Exemple 2 :

Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 1}$

■ **Correction**

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2 - x + 2 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x - 1 = 0$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = -\infty$$

Méthode 8. *Par composition*

Rappel de cours 6.

Si on a $f = g \circ h$ avec $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$ et $c \in \mathbb{R}$ ou $c = \pm\infty$ avec g continue au voisinage de b alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

Point méthodologique 8.

Si f est une composée de fonctions, il suffit d'appliquer le théorème ci-dessus pour calculer la limite par composition.

Exemple 1 :

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 + x + 1}$

■ **Correction**

$$\lim_{x \to 0} x^2 + x + 1 = 1$$

or $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1

Donc par composition

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{1} = 1$$

Exemple 2 :

Soit f une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$

Justifier que $\lim\limits_{a \to -1} f\left(\dfrac{a^2}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

■ **Correction**

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc continue sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{a \to -1} \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}$$

or f est continue en $\frac{1}{2}$ donc

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc par composition,

$$\lim_{a \to -1} f\left(\frac{a^2}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Méthode 9. *En factorisant par le terme prépondérant*

Point méthodologique 9.

Lorsqu'on est face à une forme indéterminée (du type $\infty - \infty$), on peut chercher à factoriser le terme prépondérant de la fonction (celui dont la limite est "la plus forte", celui qui tend "le plus vite" vers l'infini par exemple)

Exemple :

Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

■ **Correction**

■ **Remarque :**
On est face à une forme indéterminée $(+\infty - (+\infty))$. On va factoriser par le terme prépondérant $\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x - 1)$$

or

$$\lim_{x \to 0} x - 1 = -1$$

et

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}(x-1) = -\infty$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = -\infty$$

Méthode 10. *En simplifiant la fraction lorsque la fonction est sous forme de fraction*

Point méthodologique 10.

Si l'on est dans le cas d'une fraction, on peut parfois remarquer une identité remarquable par exemple pour factoriser un des termes de la fraction, ou trouver une racine évidente d'un des termes de la fraction, et ainsi pouvoir la simplifier pour calculer la limite

Exemple :

Calculer $\displaystyle \lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1}$

■ **Correction**

Comme 1 est racine de $3x^2 - 4x + 1$, on peut mettre $(x-1)$ en facteur et on a, après calculs :

$$3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1)$$

De même, on a par identité remarquable :

$$(x^2 - 1) = (x+1)(x-1)$$

Donc

$$\frac{3x^2-4x+1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3x-1}{x+1}\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-1}=1}$$

Méthode 11. *En utilisant la méthode du "conjugué"*

Point méthodologique 11.

Dans le cas de limites avec des $\sqrt{\ }$ notamment, on peut penser à multiplier par la quantité conjuguée pour faire disparaître les $\sqrt{\ }$ qui posent problème.

On a par exemple une forme indéterminée du type $\sqrt{a_x}-\sqrt{b_x}$,

on va alors multiplier par $\dfrac{\sqrt{a_x}+\sqrt{b_x}}{\sqrt{a_x}+\sqrt{b_x}}$ (qui vaut 1), de sorte que l'on va avoir une identité remarquable en haut

$$\left(\sqrt{a_x}-\sqrt{b_x}\right)\left(\sqrt{a_x}+\sqrt{b_x}\right)=\left(\sqrt{a_x}\right)^2-\left(\sqrt{b_x}\right)^2=|a_x|-|b_x|$$

ce qui permet de faire disparaître les racines dérangeantes.

Exemple :

Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{1}{x}+5}-\sqrt{\frac{1}{x}+2}$

■ **Correction**

$$\sqrt{\frac{1}{x}+5}-\sqrt{\frac{1}{x}+2}=\left(\sqrt{\frac{1}{x}+5}-\sqrt{\frac{1}{x}+2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+5}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}}{\sqrt{\frac{1}{x}+5}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{x}+5-\left(\frac{1}{x}+2\right)\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+5}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{\frac{1}{x}+5}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}}$$

or

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{1}{x}+5}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}=+\infty$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{3}{\sqrt{\frac{1}{x}+5}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}}=0$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{1}{x}+5}-\sqrt{\frac{1}{x}+2}=0$$

■

Méthode 12. *En mettant toutes les expressions au même dénominateur*

Point méthodologique 12.

Lorsque l'on veut calculer la limite de plusieurs fractions qui ne sont pas au même dénominateur et qu'il y a une forme indéterminée, les mettre au même dénominateur pour n'avoir plus qu'une seule fraction peut permettre de calculer la limite

Exemple :

Calculer $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)^2}$

■ **Correction**

Pour $x \neq 1$,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)}{(x-1)^2)(x-1)} - \frac{(x-2)}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$$

Or

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2(x-2) = 0^-$$

Donc

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\infty$$

donc

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)^2} = -\infty$$

Méthode 13. *En transformant l'expression avec une forme exponentielle*

Rappel de cours 7.

Pour a réel strictement positif et b réel, on a :

$$a^b = e^{b\ln(a)}$$

Point méthodologique 13.

Pour calculer une limite d'une fonction du type $(a_x)^{b_x}$ quand x tend vers x_0 qui est sous une forme indéterminée, on peut parfois passer à la forme avec exponentielle pour pouvoir calculer la limite.

Exemple : (Extrait d'ECRICOME 1996)

Calculer $\lim_{x \to 0^+} x^x$

■ **Correction**

On a $\forall x > 0$

$$x^x = e^{x \ln x}$$

or

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

et comme exponentielle est continue en 0, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

i.e

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x^x = 1}$$

Méthode 14. *En reconnaissant un taux d'accroissement*

Rappel de cours 8.

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ (I inclus dans $\mathbb{R}$).

Si f est dérivable en un point x_0, alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existe et vaut } f'(x_0)$$

Point méthodologique 14.

On peut parfois reconnaître un taux d'accroissement pour montrer qu'une limite existe.

Il suffit alors de justifier que la fonction dont on a le taux d'accroissement en présence est bien dérivable en x_0

Exemple :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ par

$$g(x) = \frac{2}{x - x_0} \int_x^{x_0} f(t)\ dt$$

Montrer que g admet une limite en x_0 et la calculer.

■ **Correction**

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$, notons-la F.

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{x - x_0} \int_x^{x_0} f(t)\ dt \\ &= \frac{2}{x - x_0}(F(x_0) - F(x)) \\ &= -2\ \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

On reconnaît un taux d'accroissement or F est dérivable en x_0 (primitive de f sur $\mathbb{R}$)

donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ existe et vaut $F'(x_0) = f(x_0)$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe et vaut $-2f(x_0)$ ■

Méthode 15. *En utilisant les théorèmes d'encadrement ou de comparaison*

Rappel de cours 9.

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in I$.

- **Théorème d'encadrement :**

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R})$$

et pour x au voisinage de x_0,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut ℓ.

- **Théorème de comparaison :**

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ et pour x au voisinage de x_0,

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ et pour x au voisinage de x_0,

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Point méthodologique 15.

On peut parfois utiliser un encadrement démontré à une question précédente ou donné par l'énoncé pour calculer une limite. D'autres fois, il faudra trouver soi-même l'encadrement

Par exemple, en présence des fonctions sin et cos, il faut penser à utiliser les inégalités

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos(t) \leq 1$$

Pour trouver les encadrements, on peut également penser à l'inégalité des accroissements finis, l'inégalité de Taylor-Lagrange, etc.

Exemple 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq \dfrac{x^2+2x+1}{4}$

Calculer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

■ **Correction**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq |f(x)| \leq \frac{x^2+2x+1}{4}$$

or

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{4} = 0$$

donc par théorème d'encadrement

$$\lim_{x \to -1} |f(x)| = 0$$

donc

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$$

■

Exemple 2 :

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} + \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

■ **Correction**

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \sin(t) \geq -1$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq -1$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq \frac{1}{x^2} - 1$$

or

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - 1 = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty \quad \text{par comparaison}$$

■

Méthode 16. *En utilisant les équivalents*

Point méthodologique 16.

Une méthode très fréquente pour trouver une limite en un point est de trouver un équivalent (voir 4. Equivalent, négligeabilité et développements limités pour voir comment trouver un équivalent d'une fonction en un point) (si vous n'avez pas encore vu les équivalents, inutile de vous attarder sur cette méthode, vous disposez sans doute des outils nécessaires à la résolution de votre question sans passer par les équivalents). Il suffit alors de calculer la limite de cet équivalent en ce point.

Exemple 1 :

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$

■ **Correction**

Rappel de cours 10.

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

On a

$$\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1$$

■

Exemple 2 :

Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{-\ln(1+x)}$

■ **Correction**

Rappel de cours 11.

$$e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x; \quad 1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$$

On va donc chercher à faire apparaître ces formes usuelles

$$\frac{e^x - \cos(x) - x}{-\ln(1+x)} = \frac{e^x - 1}{-\ln(1+x)} + \frac{1 - \cos(x)}{-\ln(1+x)} - \frac{x}{-\ln(1+x)}$$

Or

$$\frac{e^x - 1}{-\ln(1+x)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{-x} \underset{x \to 0}{\sim} -1$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{-\ln(1+x)} = -1$$

$$\frac{1 - \cos(x)}{-\ln(1+x)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{-x} \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x}{2} \underset{x \to 0}{\to} 0$$

$$\frac{x}{-\ln(1+x)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x \to 0}{\sim} 1$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$$

Donc on a par sommation des limites :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{-\ln(1+x)} = 0$$

Exemple 3 :

Calculer $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1 - e^t + te^t + t^2e^t}{t^2}$

■ **Correction**

■ **Remarque :**

Pour trouver un équivalent, on peut parfois passer par un développement limité (voir 4. Équivalent, négligeabilité et développement limité)

$$\begin{aligned}
1 - e^t + te^t + t^2e^t &= 1 - (1 + t + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{0}(t^2)) + t(1 + t + \underset{t\to 0}{0}(t)) + t^2(1 + \underset{t\to 0}{0}(1)) \\
&= 1 - 1 - t - \frac{t^2}{2} + t + t^2 + t^2 + \underset{t\to 0}{0}(t^2) \\
&= \frac{3}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{0}(t^2) \\
&\underset{t\to 0}{\sim} \frac{3}{2}t^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1 - e^t + te^t + t^2e^t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{3}{2}\frac{t^2}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{3}{2}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{1 - e^t + te^t + t^2e^t}{t^2} = \frac{3}{2}}$$

Méthode 17. *En utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point*

Rappel de cours 12.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f.

Soit $x_0 \in D_f$ et $\ell \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si

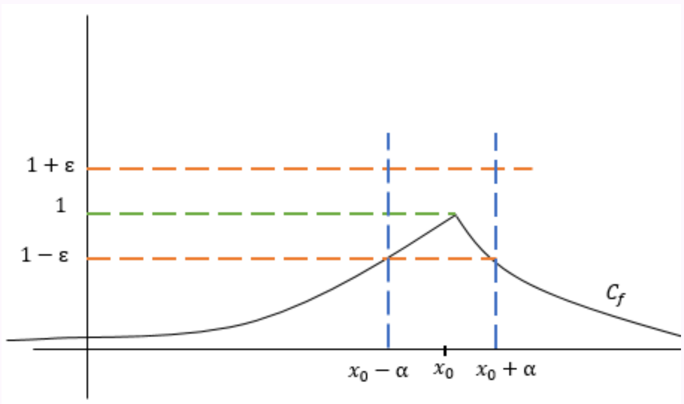
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Si D_f ne pose pas de problème, on a plus généralement, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in [x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha], \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Il est important de comprendre ces définitions et de ne pas les apprendre simplement par cœur. Dans ce premier cas, la définition signifie que pour tout écart choisi (ε), on peut trouver un réel (α) tel que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f et proche de x_0 à $\pm\alpha$ près, on a $f(x)$ qui est proche de sa limite ℓ à ε (l'écart) près.

Donc quelle que soit la précision choisie, on peut en se rapprochant beaucoup de x_0 trouver une valeur de $f(x)$ qui soit proche de ℓ à cette précision près.



Rappel de cours 13.

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si et seulement si

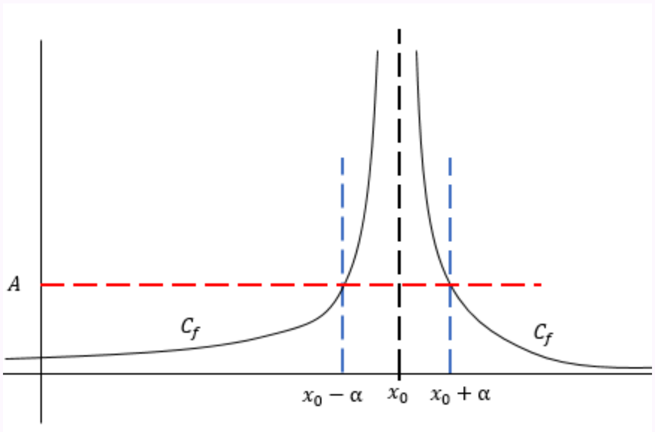
$$\forall A > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 / \ / \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ f(x) > A$$

Si D_f ne pose pas de problème, on a plus généralement, $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\forall A > 0, \quad \exists\, \alpha > 0 / \ / \forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], \quad f(x) > A$$

Dans ce cas, la définition signifie que quel que soit le réel strictement positif choisi (A), on peut trouver un réel (α) tel que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f et proche de x_0 à $\pm\alpha$ près, on a $f(x)$ qui dépasse A.

Donc quelle que soit la borne choisie, si la limite de f est $+\infty$, alors on peut en se rapprochant suffisamment de x_0 trouver une valeur de $f(x)$ qui dépasse cette borne.



- $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si

$$\forall A < 0, \quad \exists\, \alpha > 0 / \ / \forall x \in D_f, \quad |x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ f(x) < A$$

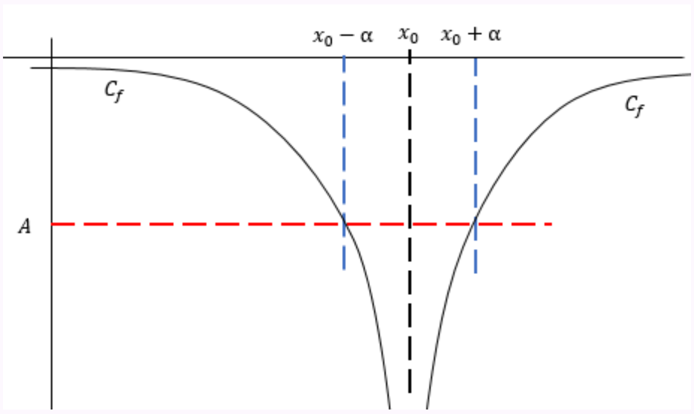
Si D_f ne pose pas de problème, on a plus généralement, $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\forall A < 0, \quad \exists\, \alpha > 0 / \ / \forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], \quad f(x) < A$$

Rappel de cours 14.

Dans ce cas, la définition signifie que quel que soit le réel strictement négatif choisi (A), on peut trouver un réel (α) tel que pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de f et proche de x_0 à $\pm\alpha$ près, on a $f(x)$ qui soit strictement inférieur A.

Donc quelle que soit la borne choisie, si la limite de f est $-\infty$, alors on peut en se rapprochant suffisamment de x_0 trouver une valeur de $f(x)$ qui soit sous cette borne.



Point méthodologique 17.

Dans de rares cas, il faudra utiliser la définition de la limite pour pouvoir la calculer. La présence éventuelle d'un ε dans l'énoncé peut nous mettre la puce à l'oreille.

Exemple :

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $[0;1]$

Soit S une fonction définie sur $[0;1]$.

Soit $x_0 \in [0;1]$

Pour $\varepsilon > 0,\ \exists\ R \in \mathbb{N}\ /\ \forall x \in [0;1],\ \ |S(x) - S(x_0)| \leq \left|\sum_{k=0}^{R} v_k(x_0)\right| + \frac{\varepsilon}{2}$

Montrer que $\lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$

■ **Correction**

Soit $\varepsilon > 0$, $\forall k \in [\![0, R]\!]$, v_k est continue en x_0 donc $\sum_{k=0}^{R} v_k$ est continue en x_0 donc

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{R} v_k(x) = \sum_{k=0}^{R} v_k(x_0)$$

Donc par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists\ \alpha > 0\ /\ \forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha],\quad \left|\sum_{k=0}^{R} v_k(x) - \sum_{k=0}^{R} v_k(x_0)\right| \leq \varepsilon'$$

En prenant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, on a donc :

$$\exists\ \alpha > 0\ /\ \forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha],\quad \left|\sum_{k=0}^{R} v_k(x) - \sum_{k=0}^{R} v_k(x_0)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc, en reprenant l'inégalité de l'énoncé, on a :

$$\exists\ \alpha > 0\ /\ \forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha],\quad |S(x) - S(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et ce pour tout $\varepsilon > 0$

Donc par définition de la limite :

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = S(x_0)$$

■

b. Comment montrer qu'une fonction admet une limite L $(\in \mathbb{R}$ ou $= \pm\infty)$ en $\pm\infty$?

Méthode 18. *Par le calcul*

(Voir c) <u>Comment calculer la limite L $(\in \mathbb{R}$ ou $= \pm\infty)$ d'une fonction f en $\pm\infty$?</u>

Méthode 19. *En utilisant le théorème de la limite monotone*

Rappel de cours 15.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$

- Toute fonction monotone admet une limite en $\pm\infty$
- Si f est croissante et majorée, alors elle admet une limite ℓ réelle en $+\infty$
- Si f est décroissante et minorée, alors elle admet une limite ℓ réelle en $+\infty$
- Si f est croissante et minorée, alors elle admet une limite ℓ réelle en $-\infty$
- Si f est décroissante et majorée, alors elle admet une limite ℓ réelle en $-\infty$
- Si f est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$
- Si f est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$ en $+\infty$
- Si f est croissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$
- Si f est décroissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$ en $-\infty$

Exemple :

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, convexe, majorée et à valeurs positives.

a) On suppose qu'il existe $x_0 \geq 0$ tel que $f'(x_0) > 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

En déduire que f' est à valeurs négatives.

b) Montrer alors que f admet une limite réelle en $+\infty$

■ **Correction**

a) f est convexe sur $\mathbb{R}_+$ donc sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes, en particulier celle en x_0 (d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$)

Donc

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Or

$$f'(x_0) > 0$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

on a une contradiction car f est majorée

Donc

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) \leq 0$$

b) f est donc décroissante et minorée (par 0) donc f admet une limite réelle en $+\infty$

c. Comment calculer la limite L $(\in \mathbb{R}$ ou $= \pm\infty)$ d'une fonction f en $\pm\infty$?

■ **Remarque :**

Si une question demande de montrer qu'une fonction admet une limite L $(L \in \mathbb{R})$ en un point $\pm\infty$ et de la calculer (ou demande de la calculer directement), il ne faut pas s'évertuer à montrer d'abord l'existence puis faire le calcul.

Il faut calculer la limite directement, ce qui prouvera son existence.

Si la question demande juste de prouver l'existence, referez-vous au b) de cette partie 3.

Méthode 20. *Par calcul direct*

Point méthodologique 18.

On peut parfois calculer la limite directement en utilisant propriétés sur les limites de base. On peut notamment utiliser les croissances comparées.

Rappel de cours 16.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\ e^x = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Plus généralement, pour tous réels strictement positifs a et b

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^b\ e^{ax} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0$$

Exemple 1 :

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ e^{-\sqrt{x}}$

■ **Correction**

On a

$$\forall x \geq 0 \quad x^2\ e^{-\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^4 e^{-\sqrt{x}}$$

on a alors

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\right)^4 e^{-\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^4}{e^X} = 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^2 \, e^{-\sqrt{x}} = 0}$$

Exemple 2 :

Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{[\ln(x^4)]^3}$

■ **Correction**

On a :

$$\forall \; x > 1 \quad \frac{\sqrt{x}}{[\ln(x^4)]^3} = \frac{\sqrt{x}}{(4 \ln x)^3} = \frac{\sqrt{x}}{4^3 (\ln x)^3}$$

or

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^3} = +\infty \quad \text{par croissance comparée}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{(\ln(x^4))^3} = +\infty}$$

Méthode 21. *Par composition*

Rappel de cours 17.

Si on a $f = h \circ h$.

Avec

$$\lim_{x \to a} h(x) = b$$

et

$$\lim_{y \to b} g(y) = c$$

avec $a = \pm\infty$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = \pm\infty$ et $c \in \mathbb{R}$ ou $c = \pm\infty$ avec g continue au voisinage de b, alors $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = c$

Point méthodologique 19.

Si f est une composée de fonctions, il suffit d'appliquer le théorème ci-dessus pour calculer la limite par composition

Exemple :

Calculer $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

■ **Correction**

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$$

or $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue en 1

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$$

Méthode 22. *En factorisant par le terme prépondérant*

Point méthodologique 20.

Lorsqu'on est face à une forme indéterminée (du type $\infty - \infty$), on peut chercher à factoriser le terme prépondérant de la fonction (celui dont la limite est "la plus forte", celui qui tend "le plus vite" vers l'infini par exemple)

Méthode 23. *En simplifiant la fraction lorsque la fonction est sous forme de fraction*

Point méthodologique 21.

Si l'on est dans le cas d'une fraction, on peut parfois remarquer une identité remarquable par exemple pour factoriser un des termes de la fraction, ou trouver une racine évidente d'un des termes de la fraction, et ainsi pouvoir la simplifier pour calculer la limite

Exemple 1 :

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+7x^3-8}{5x^2-1+x^3}$

■ **Correction**

$$\frac{2x^2+7x^3-8}{5x^2-1+x^3} = \frac{x^3}{x^3}\frac{\left(7+\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^3}\right)}{1-\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x^3}}$$

or

$$\lim_{x\to+\infty} 7+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^3} = 7$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3} = 1$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+7x^3-8}{5x^2-1+x^3} = 7$$

■ **Remarque :** Cette question se traite plus rapidement avec des équivalents, mais si vous ne les avez pas encore vus, vous devez passer par cette méthode

Méthode 24. *En utilisant la méthode du "conjugué"*

Point méthodologique 22.

Dans le cas de limites avec des $\sqrt{\ }$ notamment, on peut penser à multiplier par la quantité conjuguée pour faire disparaître les $\sqrt{\ }$ qui posent problème.

On a par exemple une forme indéterminée du type $\sqrt{a_x} - \sqrt{b_x}$,

on va alors multiplier par $\dfrac{\sqrt{a_x} + \sqrt{b_x}}{\sqrt{a_x} + \sqrt{b_x}}$ (qui vaut 1), de sorte que l'on va avoir une identité remarquable en haut

$$\left(\sqrt{a_x} - \sqrt{b_x}\right)\left(\sqrt{a_x} + \sqrt{b_x}\right) = \left(\sqrt{a_x}\right)^2 - \left(\sqrt{b_x}\right)^2 = |a_x| - |b_x|$$

ce qui permet de faire disparaître les racines dérangeantes.

Exemple :

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

■ **Correction**

On a :

$$\forall x \geq 3 \quad \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \frac{\left[\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}\right]\left[\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}\right]}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}$$

$$= \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} = \frac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 0}$$

Méthode 25. *En mettant toutes les expressions au même dénominateur*

Point méthodologique 23.

Lorsque l'on veut calculer la limite de plusieurs fractions qui ne sont pas au même dénominateur et qu'il y a une forme indéterminée, les mettre au même dénominateur pour n'avoir plus qu'une seule fraction peut permettre de calculer la limite

Exemple :

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

■ **Correction**

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = 0$$

Méthode 26. *En transformant l'expression avec une forme exponentielle*

Rappel de cours 18.

Pour a réel strictement positif et b réel, on a :

$$a^b = e^{b\ln(a)}$$

Point méthodologique 24.

Pour calculer une limite d'une fonction du type $(a_x)^{b_x}$ quand x tend vers $\pm\infty$ qui est sous une forme indéterminée, on peut parfois passer à la forme avec exponentiel pour pouvoir calculer la limite.

■ **Correction**

■ **Remarque :** Attention, $(1)^{+\infty}$ est une forme indéterminée

Soit $x > 0$,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

or

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

donc

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Méthode 27. *En utilisant les théorèmes d'encadrement ou de comparaison*

Rappel de cours 19.

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in I$.

- **Théorème d'encadrement :**

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R})$$

et pour x au voisinage de x_0,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

alors $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut ℓ.

- **Théorème de comparaison :**

Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ et pour x au voisinage de x_0,

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ et pour x au voisinage de x_0,

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Point méthodologique 25.

On peut parfois utiliser un encadrement démontré à une question précédente ou donné par l'énoncé pour calculer une limite. D'autres fois, il faudra trouver soi-même l'encadrement

Par exemple, en présence des fonctions sin et cos, il faut penser à utiliser les inégalités

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos(t) \leq 1$$

Pour trouver les encadrements, on peut également penser à l'inégalité des accroissements finis, l'inégalité de Taylor-Lagrange, etc.

Exemple 1 :

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 \sin(x)}{e^x}$

■ **Correction**

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Donc pour $x > 0$,

$$-\frac{x^2}{e^x} \leq \frac{x^2 \sin(x)}{e^x} \leq \frac{x^2}{e^x} \quad \text{car} \quad \frac{x^2}{e^x} > 0$$

Or

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{e^x} = 0$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \quad \text{par croissances comparées}$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \sin(x)}{e^x} = 0 \quad \text{par théorème d'encadrement}$$

Exemple 2 :

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

■ **Correction**

Rappel de cours 20.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

donc

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Ces deux inégalités sont très classiques

Pour

$$x > 0, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Donc

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Donc

$$\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \frac{x}{x}$$

Donc

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$$

or

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$$

Donc par encadrement,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$$

Exemple 3 :

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) \geq 1$.

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

■ **Correction**

Rappel de cours 21.

Inégalité des accroissements finis

Soit f continue sur l'intervalle non réduit à un point $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle qu'il existe α et β tels que pour tout t élément de $]a; b[$:

$$\alpha \leq f'(t) \leq \beta$$

Alors

$$\alpha(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \beta(b-a)$$

Soit f continue sur l'intervalle non réduit à un point $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, telle qu'il existe M tel que pour tout t élément de $]a; b[$:

$$|f'(t)| \leq M$$

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$$

Soit $x > 0$,

1. φ dérivable sur $[0; x]$
2. $\forall\, t \in [0; x], \quad \varphi'(t) \geq 1.$

Donc par l'inégalité des accroissements finis,

$$1 \times (x - 0) \leq \varphi(x) - \varphi(0)$$

Donc

$$\varphi(x) \geq x$$

Or

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Méthode 28. *En utilisant les équivalents*

Point méthodologique 26.

Une méthode très fréquente pour trouver une limite en un point est de trouver un équivalent (voir 4. Equivalent, négligeabilité et développements limités pour voir comment trouver un équivalent d'une fonction en un point) (si vous n'avez pas encore vu les équivalents, inutile de vous attarder sur cette méthode, vous disposez sans doute des outils nécessaires à la résolution de votre question sans passer par les équivalents). Il suffit alors de calculer la limite de cet équivalent en $\pm\infty$.

Exemple 1 :

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+7x^3-8}{5x^2-1+x^3}$

■ **Correction**

Rappel de cours 22.

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n\, x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n\, x^n \quad \text{si} \quad a_n \neq 0$$

On a donc

$$\begin{cases} 2x^2+7x^3-8 & \sim \quad 7x^3 \\ 5x^2-1+x^3 & \sim \quad x^3 \end{cases}$$

donc

$$\frac{2x^2+7x^3-8}{5x^2-1+x^3} \sim \frac{7x^3}{x^3}$$

d'où

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 7x^3 - 8}{5x^2 - 1 + x^3} = 7}$$

■

Exemple 2 :

Calculer $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

■ **Correction**

Rappel de cours 23.

$$\ln(1+y) \underset{y \to 0}{} y$$

On a

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} 1$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

■

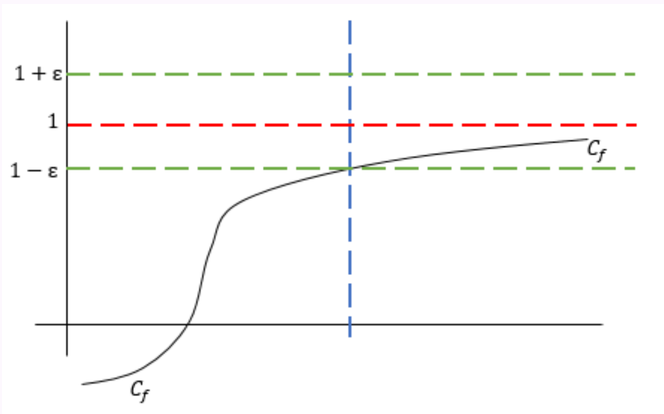
Méthode 29. *En utilisant la définition de la limite d'une fonction en* $\pm\infty$

Rappel de cours 24.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R})$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \geq \alpha, \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas, la définition signifie que pour tout écart choisi (ε), on peut trouver un réel (α) (une sorte de borne) tel que pour tout x supérieur à ce réel (α), on a $f(x)$ qui est proche de sa limite ℓ à ε (l'écart) près. Donc quelle que soit la précision choisie, on peut en se rapprochant de l'infini trouver une valeur α à partir de laquelle $f(x)$ soit toujours proche de ℓ à cette précision près au moins



- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0 / \forall x \geq \alpha, \quad f(x) \geq A$

Dans ce cas, la définition signifie que quel que soit le réel strictement positif choisi (A), On peut trouver un réel (α) (une sorte de borne) tel que pour tout x dépassant ce réel (α), on a $f(x)$ qui soit strictement supérieur A. Donc quelle que soit la borne choisie, si la limite de f est $+\infty$, alors on peut en se rapprochant suffisamment de l'infini trouver une borne à partir de laquelle $f(x)$ est toujours au-dessus de A.