MATHS
ESPACES VECTORIELS 1

Un extrait de polycopié MyPrepa

Rappels de cours, méthodes, exercices et corrigés

Chapitre 6
Espaces vectoriels

Remarque

• **Attention !** Les espaces vectoriels sont séparés en deux parties dans le programme. Une "introduction aux espaces vectoriels" est d'abord traitée en cours, puis plus tard dans l'année sont ajoutés des "Compléments sur les espaces vectoriels" avec notamment la notion d'espace vectoriel de dimension finie. Par soucis de cohérence, nous avons souhaité mettre tous ces points dans le même chapitre. Chaque question ou méthode faisant partie de ces "Compléments sur les espaces vectoriels" abordés plus tard au cours de la 1ère année est accompagnée du symbole ★. Si vous n'avez pas encore étudié ces compléments, ne vous attardez donc pas sur ces questions et méthodes.
• Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1. Sous-espaces vectoriels

Question 1 Comment montrer qu'un espace F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ?

Méthode 1 **En montrant les 3 points définissant un sous-espace vectoriel**

RAPPEL DE COURS

• $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions de $I (I \subset \mathbb{R}$ ou $I \subset \mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$) sont des espaces vectoriels.
• F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
1. F est inclus dans E
2. $0_E \in F$ i.e. F est non vide
3. $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall (u, v) \in F^2,\ (\alpha u + v) \in F$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode sera le plus souvent utilisée pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. C'est un classique.

Exercice

Extrait d'ESSEC 2015

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit q une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $F(q)$ l'ensemble défini par : $F(q) = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}),\ \forall t \in [0, 1],\ f''(t) = q(t)f(t)\}$
Montrer que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Corrigé

• $F(q) \subset E$
• Soit $f = 0_E$ $\forall t \in [0, 1], f''(t) = 0 = q(t)f(t)$
Donc $f \in F(q)$ et $F(q) \neq \emptyset$.
• Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in (F(q))^2$. On pose $h = \alpha f + g$.
On a : $\forall t \in [0, 1]$ $h''(t) = \alpha f''(t) + g''(t) = \alpha q(t)f(t) + q(t)g(t) = q(t)(\alpha f + g)(t) = q(t)h(t)$
D'où $\forall t \in [0, 1], h''(t) = q(t)h(t)$
Donc $h \in F(q)$ i.e. $\alpha f + g \in F(q)$.
Ainsi $\boxed{F(q) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

Méthode 2 **En montrant que $F = \text{vect}(U)$ où U est une famille de vecteurs de E**

RAPPEL DE COURS

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, ..., u_p) \in E^p$.
On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ et on note $\text{vect}(u_1, u_2, ..., u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$.

On a : $\text{vect}(u_1, ..., u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$

$\text{vect}(u_1, ..., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, on peut chercher à exprimer F sous forme d'un vect d'éléments de E. L'interêt de cette méthode est de pouvoir ensuite facilement trouver une base.

Exercice

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(-1) = P(0) = P(1) = 0\}$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

Corrigé

$$\begin{aligned} F &= \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} \\ &= \{(X-1)X(X+1)(aX+b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{(X^3 - X)(aX+b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{a(X^4 - X^2) + b(X^3 - X),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(X^4 - X^2, X^3 - X) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X]}$

Question 2 Comment montrer qu'un espace F n'est pas un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E ?

Méthode **En montrant qu'un des 3 points définissant un sous-espace vectoriel n'est pas vérifié**

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer qu'une partie F de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E on peut :
- Montrer que 0_E n'appartient pas à F
- Trouver $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in F$ tel que λu n'appartient pas à F.
- Trouver u et v dans F tel que $u + v$ n'appartient pas à F.

Exercice

Extrait d'ESCP 2004

On note E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une suite réelle $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dite adaptée à f, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = s_n f(nx)$

1. Montrer que les fonctions constantes appartiennent à E.

2. Soit A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x - \frac{1}{2}$. Établir que A est un élément de E.

3. E constitue-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Corrigé

1. Soit f une fonction constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c$ et ainsi :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} c = n \times c = n \times f(nx)$
Donc en posant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = n$, on a bien l'existence d'une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) = s_n \times f(nx)$$

Donc $f \in E$.

Donc $\boxed{\text{le fonctions constantes appartiennent à } E.}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} A\left(x+\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= n\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{n}\times\frac{n(n-1)}{2} = nx-\frac{n}{2}+\frac{n-1}{2} = nx-\frac{1}{2} \\ &= 1\times A(nx)\end{aligned}$$

Donc en posant $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = 1$, on a bien l'existence d'une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} A\left(x+\frac{x}{n}\right) = s_n \times A(nx)$$

Donc $\boxed{A \in E}$

3. Notons $B \to x \mapsto \dfrac{1}{2}$. Supposons que $A+B \in E$.

Alors il existe un suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{n}\right) = s_n \times nx$

En particulier, pour $x=0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(0+\frac{k}{n}\right) = s_n \times n \times 0 = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k = 0$ i.e. $\displaystyle\frac{1}{n}\times\frac{(n-1)\times n}{2} = 0$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad n-1=0$. On a une contradiction.

Donc $A+B \notin E$, or $A \in E$ et $B \in E$.

Ainsi $\boxed{E \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F} \in (\mathbb{R},\mathbb{R})}$

Question 3 Comment montrer une égalité d'espaces vectoriels ?

Méthode 1 Par double inclusion

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il s'agit d'une méthode à utiliser principalement lorsque les espaces sont définis de manière abstraite et non totalement explicite. On utilisera alors les méthodes classiques pour montrer une double inclusion.

Exercice

Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathbb{R}[A]$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\mathbb{R}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$ (Par exemple : $A^3+4A \in \mathbb{R}[A]$)

Z désigne un polynôme annulateur non nul de A et de degré minimal, (on note d le degré de $\mathbb{Z}$).

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un unique couple (Q,R) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P = ZQ+R$ et $\deg(R) < d$.
2. En déduire que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{vect}(I_n, A, ..., A^{d-1})$

Corrigé

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par division euclidienne :

$\boxed{\text{Il existe un unique couple de polynôme } (Q,R) \text{ tel que } P = ZQ+R \text{ avec } \deg(R) < \deg(Z) = d}$

2. • Comme $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant les matrices $I_n = A^0, A, ..., A^{d-1}$, on a : $\mathrm{vect}(I_n, A, ..., A^{d-1}) \subset \mathbb{R}[A]$

• Réciproquement, soit $P(A) \in \mathbb{R}[A]$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après la question précédente, il existe un unique couple $(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P = ZQ+R$ avec $\deg(R) < d$.

On a alors : $P(A) = Z(A)Q(A)+R(A) = R(A)$

Donc $P(A) = R(A)$ car $Z(A) = 0_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}$.
De plus, $\deg(R) < d$, donc $R(A) \in \text{vect}(I_n, A, ..., A^{d-1})$
On a donc : $P(A) \in \text{vect}(I_n, A, ..., A^{d-1})$
Donc $\mathbb{R}[A] \subset \text{vect}(I_n, A_1, ..., A^{d-1})$
Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}[A] = \text{vect}(I_n, A, ..., A^{d-1})}$

Méthode 2 ★ **Par inclusion et égalité de dimensions**

RAPPEL DE COURS

Soient A et B des espaces vectoriels de dimension finie.
Si $A \subset B$ et $\dim(A) = \dim(B)$ alors $A = B$.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Cette méthode est très fréquemment utilisée lorsqu'on a déjà démontré (ou alors qu'on est capable de le faire facilement) que les dimensions des deux espaces sont égales. Il suffit alors de montrer la plus simple des deux inclusions.

Exercice

★ On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$, $w = (1, -2, 3)$
Soient $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + z = 0\}$ et $F = \text{vect}(u, v, w)$
On admet que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $F = G$.

Corrigé

• On remarque que $u + v = w$.
On a $F = \text{vect}(u, v, w) = \text{vect}(u, v, u + v) = \text{vect}(u, v)$
Or u et v ne sont pas colinéaires donc : (u, v) est une base de F et $\dim(F) = 2$
• $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -2y - z\} = \{(-2y - z, y, z)\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \{y(-2, 1, 0) + z(-1, 0, 1),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$
Donc $G = \text{vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$
Or $(-2, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$ ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre de G.
D'où $((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de G, $\dim(G) = 2$

RAPPEL DE COURS

Si $(e_1, ..., e_r)$ est une base de F alors : $F \subset G \iff \forall i \in [\![1, r]\!],\ e_i \in G$

$F = \text{vect}(u, v)$ et (u, v) est une base de F.
Or $\begin{cases} 1 + 2 \times (-1) + 1 = 0 \text{ donc } u \in G \\ 0 + 2 \times (-1) + 2 = 0 \text{ donc } v \in G \end{cases}$
Ainsi $F \subset G$
Comme $\dim(F) = \dim(G) = 2$ et $F \subset G$, on a $\boxed{F = G}$

6.2. Familles libres, génératrices et bases

Question 1 Comment montrer qu'une famille U est libre ?

Méthode 1 **Si U comprend un unique élément u, en montrant que $u \neq 0$**

RAPPEL DE COURS

Si U est une famille à 1 élément et que cet élément est non nul, alors U est libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsqu'on est en présence d'une famille de cardinal 1, il suffit d'appliquer littéralement le rappel de cours précédent pour justifier la liberté de la famille.

Exercice

Justifier que la famille ((2,5)) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$

Corrigé

$(2,5) \neq (0,0)$ donc $\boxed{\text{(2,5) est une famille libre de } \mathbb{R}^2.}$

Méthode 2 — Si U est une famille à 2 élements u et v, en montrant que u et v sont non colinéaires

RAPPEL DE COURS

Soit $U = (u, v)$ une famille à deux éléments.
u et v sont non colinéaires $\Longleftrightarrow U$ est libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsqu'on est en présence d'une famille de cardinal 2, il suffit d'appliquer littéralement le rappel de cours précédent pour justifier la liberté de la famille.

Exercice

Justifier que la famille $((1,2,3),(0,1,1))$ est libre.

Corrigé

$(1,2,3)$ et $(0,1,1)$ sont non colinéaires.
Donc $\boxed{\text{la famille } ((1,2,3),(0,1,1)) \text{ est libre}}$

Méthode 3 — En utilisant la définition d'une famille libre

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, ..., u_p) \in E^p$.
($(u_1, u_2, ..., u_p)$ est une famille libre) si et seulement si $(\forall(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^p,\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0)$

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Revenir à cette méthode doit vraiment être une constante dans votre raisonnement lorsque la famille comporte 3 éléments ou plus. On revient à la définition de la liberté et on cherche à montrer l'implication rappelée ci-dessus pour conclure sur la liberté de la famille.

Exercice

Soit $u = (1,1,1),\ v = (1,2,0)$ et $w = (1,1,0)$ des éléments de $\mathbb{R}^3$. Montrer que (u, v, w) est une famille libre.

Corrigé

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\ u + b\ v + c\ w = 0$

Alors $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+c=0 \\ a=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 2b+c=0 \\ a=0 \end{cases} \Longleftrightarrow a=b=c=0$

Ainsi $\boxed{(u, v, w) \text{ est une famille libre}}$

Méthode 4 — S'il s'agit de polynômes, en montrant que c'est une famille de polynômes non nuls échelonnés en degré

RAPPEL DE COURS

Toute famille de polynômes non nuls échelonnés en degré est une famille libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsqu'on est en présence d'une famille de polynômes non nuls, le réflexe doit être de vérifier si ces polynômes sont échelonnés en degré. Si c'est le cas, il est important de préciser qu'ils sont tous non nuls.
Si les polynômes ne sont pas échelonnés en degré, il faut utiliser la méthode précédente.

Exercice

Extrait d'HEC 2013

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose : $x^{<k>} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k}(x+i-1) & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$

On associe aux fonctions polynomiales $x \mapsto x^{<k>}$, les polynômes $X^{<k>}$ de $\mathbb{R}[X]$.
Montrer que $(X^{<0>}, X^{<1>}, ..., X^{<n>})$ est une famille libre.

Corrigé

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \deg(X^{<k>}) = \deg(\prod_{i=1}^{k}(X+i-1)) = k$

De plus, $\deg(X^{<0>}) = 0$ car $X^{<0>} = 1$.
Ainsi, la famille $(X^{<0>}, X^{<1>}, ..., X^{<n>})$ forme une famille de $(n+1)$ polynômes non nuls échelonnés en degrés.
Donc $\boxed{(X^{<0>}, X^{<1>}, ..., X^{<n>}) \text{ est une famille libre}}$

Méthode 5 — En utilisant le lien entre application injective et familles libres

Remarque

Cette méthode nécessite la connaissance du chapitre sur les applications linéaires. Si vous ne l'avez pas encore abordé, ne vous y attardez pas.

RAPPEL DE COURS

Soient E et F des espaces vectoriels.
Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille libre de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
(f injective) $\Rightarrow$ $((f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n))$ est libre).

POINT MÉTHODOLOGIQUE

On peut penser à utiliser la propriété ci-dessus pour montrer qu'une famille est libre lorsque l'on peut exploiter une application linéaire f injective.

Exercice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n^2$.
Soit $(M_1, ..., M_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $({}^tM_1, ..., {}^tM_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé

Notons f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à M associe ${}^tM$. D'après le cours, f est linéaire. De plus, soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = 0$.
Alors ${}^tM = 0$ donc $M = 0$.
Donc $\text{Ker}(f) \subset \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. Comme $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \text{Ker}(f)$, on a :
$\text{Ker}(f) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et donc f est injective.
Or $(M_1, ..., M_p)$ est libre. Donc $(f(M_1), ..., f(M_p))$ est libre.
Donc $\boxed{({}^tM_1, ..., {}^tM_p) \text{ est une famille libre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Question 2 Comment montrer qu'une famille U est liée i.e. n'est pas libre ?

Méthode 1 En montrant que la famille comporte le vecteur nul

RAPPEL DE COURS

Si une famille comporte le vecteur nul alors c'est une famille liée, i.e. non libre.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si on parvient à identifier un vecteur nul alors on peut être assuré que toute famille contenant ce vecteur est liée.

Exercice

Soit f une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$.
Montrer que $(x \mapsto x, \ x \mapsto e^x + 1, \ f)$ est une famille liée.

Corrigé

f est continue et à valeurs positives sur $[0, 1]$.
Comme, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$, par théorème $\forall t \in [0, 1], f(t) = 0$
Donc $\boxed{(x \mapsto x, \ x \mapsto e^x + 1, \ f) \text{ est une famille liée}}$

Méthode 2 Si U est une famille à 2 éléments u et v, en montrant que u et v sont colinéaires

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Lorsque la famille est de cardinal 2, il suffit de montrer que les vecteurs sont colinéaires pour justifier qu'elle est liée.

Exercice

Justifier que la famille $((1, 2, 3), (4, 8, 12))$ est liée.

Corrigé

$(4, 8, 12) = 4(1, 2, 3)$ donc $\boxed{\text{la famille est liée}}$

Méthode 3 — En montrant qu'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres

RAPPEL DE COURS

Une famille à deux éléments ou plus est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si on parvient à exprimer un des vecteurs d'une famille comme combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille alors cette famille est liée.

Exercice

Montrer que la famille $((X, 2X-5, 5X-5))$ est liée.

Corrigé

On a : $5X - 5 = 2X - 5 + 3 \times X$

Donc $\boxed{((X, 2X-5, 5X-5)) \text{ est une famille liée de } \mathbb{R}[X]}$

Méthode 4 — ★ En montrant que la famille comprend un nombre d'éléments strictement supérieur à la dimension de l'espace vectoriel auquel ils appartiennent

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille d'éléments de E.
$(u_1, u_2, ..., u_p)$ libre $\Rightarrow p \leq n$.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la famille d'un espace vectoriel E de dimension finie comprend un nombre d'éléments strictement supérieur à la dimension de E, alors on peut conclure que la famille est liée.

Exercice

★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la famille $(A^k)_{k \in [\![0, n^2]\!]}$ est liée.

Corrigé

$(A^k)_{k \in [\![0, n^2]\!]}$ est une famille de $n^2 + 1$ vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 < n^2 + 1$, cette famille n'est pas libre, i.e.

$\boxed{(A^k)_{k \in [\![0, n^2]\!]} \text{ est une famille liée}}$

Question 3 — Comment montrer qu'une famille U est génératrice d'un espace vectoriel ?

Méthode 1 — En utilisant la définition d'une famille génératrice

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ d'éléments de E est une famille génératrice de $E \iff \forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$

Si $E = \text{vect}(u_1, u_2, ..., u_p)$, alors $(u_1, u_2, ..., u_p)$ est une famille génératrice de E.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Pour montrer que U est une famille génératrice de E, on prend un x quelconque dans E et on cherche à l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.
Si on a montré précédemment que E est égal à $\text{vect}(U)$, on peut directement conclure que U est génératrice de E.

Exercice

Soit $P_1 = X^2 + 2X + 1,\ P_2 = X^2 + X + 1$ et $P_3 = X^2 + X$.
(P_1, P_2, P_3) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

Corrigé

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. $\exists!(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3,\ P = a_0 + a_1X + a_2X^2$
Supposons qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{aligned} P &= \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = \alpha(X^2 + 2X + 1) + \beta(X^2 + X + 1) + \gamma(X^2 + X) \\ &= \alpha X^2 + 2\alpha X + \alpha + \beta X^2 + \beta X + \beta + \gamma X^2 + \gamma X \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on a alors :

$$\begin{cases} a_0 = \alpha + \beta \\ a_1 = 2\alpha + \beta + \gamma \\ a_2 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = a_0 - \alpha \\ -a_1 + 2\alpha + \beta + \gamma + a_2 - \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ a_2 - \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = a_0 - \alpha \\ \alpha = a_1 - a_2 \\ \gamma = a_2 - \alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= a_0 - a_1 + a_2 \\ \alpha &= a_1 - a_2 \\ \gamma &= -a_0 + a_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$

D'où, $\boxed{(P_1, P_2, P_3) \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}_2[X].}$

Méthode 2 En utilisant le lien entre application surjective et famille génératrice

Remarque

Cette méthode nécessite la connaissance du chapitre sur les applications linéaires. Si vous ne l'avez pas encore abordé, ne vous y attardez pas.

RAPPEL DE COURS

Soient E et F des espaces vectoriels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille génératrice de E.
f surjective $\Rightarrow$ $((f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n))$ est génératrice de F

POINT MÉTHODOLOGIQUE

On peut penser à utiliser la propriété ci-dessus lorsque l'on connaît une famille génératrice et qu'on peut faire entrer en jeu une application surjective pour transformer cette famille en une autre famille génératrice.

Exercice

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $n \geq p$. Soit $(P_1, ..., P_n)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}_p[X]$. Montrer que $(P_1', ..., P_n')$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$

Corrigé

Notons f l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ qui à P associe $f(P) = P'$.
f est linéaire par linéarité de la dérivation.
Soit $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Notons $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$. Posons alors $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a_{k-1}}{k} X^k$

On a $f(P) = P' = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a_{k-1}}{k} \times kX^{k-1} = \sum_{k=1}^{p} a_{k-1}X^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k = Q$

Donc Q admet un antécédent par f.

Donc f est une application linéaire surjective.
Or $(P_1, ..., P_n)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}_p[X]$.
Donc $(f(P_1), ..., f(P_n))$ une famille génératrice de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
Ainsi $\boxed{(P_1', ..., P_n') \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{R}_{p-1}[X]}$

Question 4 Comment montrer qu'une famille U n'est pas génératrice d'un espace vectoriel E ?

Méthode 1 En trouvant un vecteur de E qui ne puisse pas être exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Il faut trouver un contre-exemple à la définition d'une famille génératrice, c'est-à-dire un vecteur de l'espace vectoriel qui ne puisse être exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.
La méthode du contre-exemple doit toujours être rapide, si on ne trouve pas le contre-exemple rapidement, il ne faut pas hésiter à sauter la question.

Exercice

$((2,1),(6,3))$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

Corrigé

Cherchons $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(4,3) = \alpha(2,1) + \beta(6,3)$

$$\begin{cases} 4 = 2\alpha + 6\beta \\ 3 = \alpha + 3\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 - 3\beta \\ 4 = 6 - 6\beta + 6\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 - 3\beta \\ 4 = 6 \end{cases}$$ On a une contradiction.

$(4,3)$ ne peut donc pas s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

D'où $\boxed{((2,1),(6,3)) \text{ n'est pas une famille génératrice de } \mathbb{R}^2}$

Méthode 2 ★ En montrant que la famille a un nombre d'éléments strictement inférieur à la dimension de l'espace vectoriel

RAPPEL DE COURS

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille d'éléments de E.
$(u_1, u_2, ..., u_p)$ est génératrice de $E \Rightarrow p \geq n$.

POINT MÉTHODOLOGIQUE

Si la famille d'un espace vectoriel E comprend un nombre d'éléments strictement inférieur à la dimension de E, alors on peut conclure que la famille n'est pas génératrice de E.

Exercice

★ Justifier que $U = ((1,1,1),(1,2,3))$ n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Corrigé

U est une famille à 2 éléments de $\mathbb{R}^3$, or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Donc $\boxed{U \text{ n'est pas génératrice de } \mathbb{R}^3.}$

Rares sont ceux qui vont
jusque là ...